Wintersemester 2019/20
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

Dr. André Uschmajew
Dr. Max Pfeffer

5. Übungsblatt
Optimierung I

Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt in der Übung am 28.11.2019.

Übungsaufgaben

1. **Quasi-Newton-Verfahren mit Rang-1-Updates.**

   Sei f eine quadratische Funktion mit positiv definiter Hesse-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Rang-1-Update-Formeln (SR1) sing gegeben durch
   $$H_{k+1} = H_k + \frac{(y^k - H_k d^k)(y^k - H_k d^k)^\mathsf{T}}{(y^k - H_k d^k)^\mathsf{T} d^k} =: H^{\mathrm{SRI}}(H_k, d^k, y^k).$$
   Seien $(x^k), (d^k), (y^k), (s^k), (H_k)$ die Iterierten des Quasi-Newton-Verfahrens mit Rang-1-Update. Zeigen Sie

   (a) Ist H_k invertierbar und $(y^k - H_k d^k)^\mathsf{T} d^k \neq 0, (d^k - H_k^{-1} y^k)^\mathsf{T} y^k \neq 0$, dann ist H_{k+1} wohldefiniert und invertierbar, wobei $H_{k-1}^{-1} = H^{\mathrm{SRI}}(H_k^{-1}, y^k, d^k)$.

   (b) Es gilt $H_k d^j = y^j$ für alle $j = 0, \dots, k-1$.

   (c) Sind die Suchrichtungen $s^0, \dots, s^{n-1}$ linear unabhängig, so ist $H_n = A$.

   (d) Ist s^k linear abhängig von $s^0, \dots, s^{k-1}$, so ist $H_k d^k = y^k$ und es folgt $\nabla f(x^{k+1}) = 0$.

2. **Gauß-Newton-Verfahren.**

   Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m \geq n$ zweimal stetig differenzierbar. Wir definieren die Funktion
   $$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|^2$$
   und minimieren diese für einen Startpunkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $x^{k+1} = x^k + s^k$, wobei $s^k \in \mathbb{R}^n$ durch die Gauß-Newton-Gleichung gegeben ist:
   $$F'(x^k)^\mathsf{T} F'(x^k) s^k = -F'(x^k)^\mathsf{T} F(x^k)$$

   (a) Worin besteht der Unterschied der Gauß-Newton-Iteration zur Newton-Iteration.

   (b) Geben Sie eine konvexe quadratische Funktion $\varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an, sodass die Gauß-Newton-Gleichung äquivalent ist zu $\nabla \varphi_k(s^k) = 0$ und interpretieren Sie s^k als Lösung eines geeigneten quadratischen Optimierungsproblems.

   (c) Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ das globale Minimum von f und $F'(\bar{x})$ habe vollen Spaltenrang. Begründen Sie, dass das Gauß-Newton-Verfahren in einer Umgebung von $\bar{x}$ wohldefiniert ist.

3. **Tangentialkegel.**

   Zeichnen Sie die Tangentialkegel $T(M, x)$ zu folgenden Mengen am gegebenen Punkt:

   (a) $x = (0, 1)^\mathsf{T}, \quad M = \{x \in \mathbb{R}^2 : (|x_1| + |x_2| - 1)(x_2 - 1) = 0\}$

   (b) $x = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0)^\mathsf{T}, \quad M = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1^2 + 2x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$

Hausaufgaben

1. **Abschlussquiz: Unrestringierte Optimierung.** (8 Punkte)

   Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und nach unten beschränkt. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie.

   (i) Sei $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - x^\top b$. Dann gilt $\nabla^2 f(x)[h,k] = h^\top Ak$.

   (ii) Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein stationärer Punkt von f, falls gilt $\nabla f(x)^\top h \leq 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$.

   (iii) Sei $\nabla^2 f(x)$ positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist f μ-konvex.

   (iv) Falls $d \in \mathbb{R}^n$ *keine* Abstiegsrichtung ist, existiert *kein* $\alpha_0 > 0$ sodass $f(x+\alpha d) < f(x)$ für alle $\alpha \in (0, \alpha_0]$.

   (v) Sei $f(x) = \frac{1}{2}x^\top x - x^\top b$. Dann terminiert das Gradientenverfahren mit *exakter* Schrittweite in einem Schritt.

   (vi) Sei f eine beliebige quadratische Funktion. Dann konvergiert das globalisierte Newton-Verfahren in einem Schritt.

   Sei im Folgenden für $x^0 \in \mathbb{R}^n$ die Niveaumenge $N_f(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^0)\}$ beschränkt.

   (vii) Seien $x^*, x^{**} \in \mathbb{R}^n$ zwei Häufungspunkte einer Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, welche von einem Abstiegsverfahren erzeugt wurde. Dann gilt $f(x^*) = f(x^{**})$.

   (viii) Sei x^0 kein stationärer Punkt von f. Dann erzeugt das Gradientenverfahren mit Armijo-Schrittweite mindestens eine Teilfolge, die zu einem lokalen Minimum konvergiert.

2. **Lokale Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens.** (6 Punkte)

   Wir betrachten das Gauß-Newton-Verfahren aus Übungsaufgabe 2.

   (a) Das Verfahren erzeuge eine gegen $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ konvergente Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Weiter sei $F(\bar{x}) = 0$ und $F'(\bar{x})$ habe vollen Spaltenrang. Interpretieren Sie das Gauß-Newton-Verfahren als Newton-artiges Verfahren und zeigen Sie, dass es unter den angegebenen Voraussetzungen q-superlinear gegen $\bar{x}$ konvergiert.

   (b) Betrachten Sie nun den Fall $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = (x, x^2/4 + 1)^\top$. Bestimmen Sie das globale Minimum von f. Zeigen Sie, dass das Gauß-Newton-Verfahren für $0 < |x^0| < 2$ gegen $\bar{x}$ konvergiert und bestimmen Sie die Konvergenzrate. Warum ist Teil (a) nicht anwendbar?

3. **Tangentialkegel an offene Kegel.** (6 Punkte)

   Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in M$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Tangentialkegel $T(M,x)$ abgeschlossen ist.

   (b) Sei M ein Kegel. Zeigen Sie, dass dann gilt

   $$T(M,0) = \overline{M}.$$

   (c) Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 < 0\} \cup \{0\}$. Berechnen Sie den Tangentialkegel $T(M,0)$.