Eine Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen

und das Prinzip der Vollständigen Induktion

Laut Peano kann die Menge $\mathbb{N}$ der Natürlichen Zahlen durch die folgenden fünf Axiome charakterisiert werden:

Axiom I: 1 ist eine natürliche Zahl.

Axiom II: Jede natürliche Zahl n besitzt genau eine natürliche Zahl $n' = n+1$ als Nachfolger.

Axiom III: Die Zahl 1 ist nicht Nachfolger irgendeiner natürlichen Zahl.

AxiomIV: Sind n und m natürliche Zahlen mit $n' = m'$, so ist auch $n = m$.

Axiom V: Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Es ist $1 \in M$.

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Implikation $n \in M \Rightarrow n' \in M$.

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Bemerkung:

Axiom V heißt das *Induktionsaxiom*, weil auf ihm das Prinzip des Beweises durch **Vollständige Induktion** beruht:

Ist eine Aussage $A(n)$ für die natürliche Zahl $n = 1$ wahr, und gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, so ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel:
Wir beweisen durch vollständige Induktion:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Aussage $A(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \; = \; 1 + ... + n \; = \; \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Für ganze Zahlen m, n mit $m \leq n$ und reelle Zahlen $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ wird dabei allgemein definiert:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \; := a_m + a_{m+1} + ... + a_n.$$

Beweis der Allgemeingültigkeit der Formel $A(n)$:

Induktionsverankerung:

Es wird die Behauptung $A(1)$ verifiziert. Diese Aussage lautet:

$$1 \; = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Dies ist eine wahre Aussage.

Induktionsschritt:

Nun wird für $n \in \mathbb{N}$ die Gültigkeit der Aussage $A(n+1)$ verifiziert, **wenn** die Aussage $A(n)$ wahr ist.

Die Aussage $A(n)$ heißt auch **Induktionsannahme**; sie lautet:

$$1 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Addiert man auf beiden Seiten dieser Gleichung $n+1$, so erhält man:

$$\begin{gathered} 1 + ... + n + (n+1) = \\ \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \\ \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} = \\ \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} = \\ \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2}. \end{gathered}$$

Insgesamt impliziert die Aussage $A(n)$ also die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Das ist genau die Aussage $A(n+1)$. Damit ist allgemein die Inklusion $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ bewiesen.
Insgesamt folgt nun durch *Vollständige Induktion*, dass die Behauptung $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt.