

9. Übungsblatt zu “Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler”

Leipzig, den 12.12.2019

33.) Ermitteln Sie für die Werte  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  die Funktionswerte für die 4 Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  und  $\cotan$ . – Insgesamt sind also 12 Funktionswerte zu berechnen. Dabei ist *kein* Taschenrechner zu benutzen; statt dessen soll die Berechnung der Ergebnisse mittels geometrischer Überlegungen erfolgen.

34.) Ein Bankkunde zahlt zu Beginn jedes der 3 kommenden Jahre jeweils einen Betrag von 16384 Euro ein. Bestimmen Sie denjenigen Diskontsatz  $d_*$ , für den der hiermit gebildete Barwert genau 48009 Euro beträgt.

*Hinweis:* Sie müssen die quadratische Gleichung  $16384 \cdot (1 + a(d) + a^2(d)) = 48009$  lösen, wobei  $a(d) = \frac{1}{1+d_*}$  ist.

35.) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen auf  $\mathbb{R}$  stetig sind:

i)  $f_1(x) := \sqrt{x^2 + 1}$  für  $x < 1$ ,  $f_1(x) := \sqrt{x^2 - 1}$  für  $x \geq 1$ .

ii)  $f_2(x) := 0$  für  $x \leq 0$ ,  $f_2(x) := e^{-\frac{1}{x}}$  für  $x > 0$ .

iii)  $f_3(x) := \frac{\sin(x)}{x}$  für  $x \neq 0$ ,  $f_3(0) = 1$ .

36.) Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein  $C > 0$  gibt, so dass für alle  $x, y \in [a, b]$  gilt:

$$|f(y) - f(x)| \leq C \cdot |y - x|.$$

i) Beweisen Sie: Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig, so ist  $f$  auch gleichmäßig stetig – und folglich auch stetig.

ii) Definiere  $w : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  durch:  $w(x) := \sqrt{x}$ . Beweisen Sie, dass  $w$  *nicht* Lipschitz-stetig ist.

iii) Zeigen Sie direkt, dass die Funktion  $w$  wie in ii) gleichmäßig stetig ist, indem Sie explizit zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  angeben, so dass für alle  $x, y \in [a, b]$  mit  $|y - x| < \delta$  gilt:  $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| < \epsilon$ .

*Hinweise zu ii) und iii):* Für alle  $x, y \in [0, 1]$  gilt:  $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{y} + \sqrt{x}) = y - x$ . Betrachten Sie in ii) Zahlen  $x, y$ , die nur geringfügig größer sind als 0.

In iii) können Sie annehmen:  $x < y$ . Untersuchen Sie getrennt die Fälle  $y < \epsilon^2$ ;  $y \geq \epsilon^2$ .