

Partielle Differentialgleichungen I
 Blatt 6

Aufgabe 1

Sei $r > 0$ und sei u eine positive, harmonische Funktion in $B_r(0)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson Formel die folgende explizite Version der Harnack-Ungleichung:

$$r^{n-2} \frac{r - |x|}{(r + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^{n-1}} u(0).$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es eine nur von der Dimension n abhängige Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$\max_{B_1} |u| \leq C \left(\max_{\partial B_1} |g| + \max_{B_1} |f| \right), \quad (1)$$

wenn $u \in C^2(B_1) \cap C^0(\overline{B_1})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1 \\ u = g & \text{auf } \partial B_1 \end{cases}$$

ist.

Aufgabe 3*

Zeigen Sie, dass die Definition 29 äquivalent ist zur folgenden Definition. Eine Funktion $u \in C(U)$ heisst *subharmonisch*, falls für jedes $x \in U$ ein $\delta_x > 0$ existiert, so dass

$$u(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u \, dS \quad \forall r < \delta_x. \quad (2)$$

Aufgabe 4* (*Schwarzsches Spiegelungsprinzip*)

Sei B_1^+ der offene halbe Ball $\{x \in B_1 : x_n > 0\}$ und sei u harmonisch in B_1^+ . Zeigen Sie:

1. Falls $u \in C(\overline{B_1^+})$ und $u = 0$ auf $\partial B_1^+ \cap \{x_n = 0\}$, so ist

$$U(x) := \begin{cases} u(x) & \text{falls } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{falls } x_n < 0 \end{cases} \quad (3)$$

harmonisch in B_1 .

2. Falls $u \in C^1(\overline{B_1^+})$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial B_1^+ \cap \{x_n = 0\}$, so ist

$$U(x) := \begin{cases} u(x) & \text{falls } x_n \geq 0 \\ u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{falls } x_n < 0 \end{cases} \quad (4)$$

harmonisch in B_1 .

Hinweis: Sie können das Resultat von Aufgabe 3 benutzen.

Aufgabe 5*

Seien H_1, H_2 zwei Hyperebenen in \mathbb{R}^n , d.h. $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i \cdot x = 0\}$ für v_i Einheitsvektoren. Sei u eine nicht konstante harmonische Funktion in B_1 mit $u(x) = 0$ für alle $x \in H_1 \cup H_2$. Welche Bedingung stellt dies an den Winkel zwischen den Hyperebenen?