Jun.-Prof. Felix Pogorzelski
Dr. Martin Petersen

Vorlesung Funktionalanalysis I, Uni Leipzig, WS 2019/20

Serie 5

Aufgabe 13 (schriflich).

(a) Es sei $V = C^1([0,1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$. Prüfen Sie die folgenden Normen auf V auf Äquivalenz:

$$\|f\|_{(1)} = \|f\|_\infty, \quad \|f\|_{(2)} = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \quad \|f\|_{(3)} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

(b) Auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne $\|\cdot\|_p$ die p-Norm für $1 \leq p < \infty$. Es sei nun $1 \leq q < r < \infty$. Bestimmen Sie die optimalen Konstanten $c(q,r), C(q,r) > 0$, so dass gilt

$$c(q,r) \cdot \|x\|_r \leq \|x\|_q \leq C(q,r) \cdot \|x\|_r \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(Optimalität bedeutet hier, dass für größeres $c(q,r)$ oder für kleineres $C(q,r)$ die obige Ungleichung falsch wird.)

Aufgabe 14 (schriftlich).

Es sei $k \in U = C([0,1], \mathbb{K})$ eine stetige Funktion auf $[0,1]$ mit Werten in $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass durch

$$T : \big(U, \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(\mathbb{K}, |\cdot|\big), \quad Tf = \int_0^1 k(s) \cdot f(s)\, ds$$

ein stetiger linearer Operator definiert wird mit Operatornorm

$$\|T\| = \int_0^1 |k(s)|\, ds.$$

Aufgabe 15 (mündlich).

Es sei $(W, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Es seien $S, T : W \to W$ lineare Abbildungen auf W, die der Beziehung $ST - TS = \mathrm{Id}_W$ genügen, wobei Id_W die (lineare!) Identitätsabbildung auf W bezeichnet. Zeigen Sie, dass dann zumindest einer der beiden Operatoren unbeschränkt sein muss.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Gültigkeit der Gleichung $ST^n - T^nS = n \cdot T^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe der schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben in der Vorlesung am
Montag, den 18.11.2019.