Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 14. November 2019

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 3 für Physiker

Blatt 5

Aufgabe 1 (3 Punkte). Finde alle maximalen Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) y + x + e^x \\ y(1) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Bestimme e^D für eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Zeige, dass für alle $A, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, T invertierbar gilt

$$e^{TAT^{-1}} = Te^A T^{-1}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeige, dass dann auch $\overline{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.

Seien $\lambda = \lambda_r + \mathrm{i}\lambda_i$ und $v = v_r + \mathrm{i}v_i$ die Zerlegungen in Real- und Imaginärteil (also $\lambda_r, \lambda_i \in \mathbb{R}$ und $v_r, v_i \in \mathbb{R}^n$). Zeige, dass die komplexenwertigen Funktionen $e^{\lambda x} v$ und $e^{\overline{\lambda} x} \overline{v}$ sowie die reellwertigen Funktionen

$$e^{\lambda_r x}(v_r \cos(\lambda_i x) - v_i \sin(\lambda_i x)) \text{ und } e^{\lambda_r x}(v_r \sin(\lambda_i x) + v_i \cos(\lambda_i x))$$

den selben Unterraum von $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ aufspannen.

Hinweis: Die komplexe Konjugation $\overline{v}$ für $v \in \mathbb{C}^n$ ist komponentenweise zu verstehen.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine Matrix die die Gleichungen

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Für welche Anfangswerte $y_0 \in \mathbb{R}^3$ konvergiert die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= Ay \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

für $x \to \infty$?

Aufgabe. Seien A und B kommutierende Matrizen, das heißt $AB = BA$. Zeige, dass dann auch A und e^{Bx} sowie e^{Ax} und e^{Bx} für alle $x \in \mathbb{R}$ kommutieren. Zeige, dass $e^{(A+B)x} = e^{Ax}e^{Bx}$ gilt.

Bestimme die Matrixexponentialfunktion e^{Ax} für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda. \end{pmatrix}$$

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind in der Vorlesung am Donnerstag, dem 21.11.2019 abzugeben.