Zusatzaufgaben zu der Vorlesung “Grundwissen Geometrie”

Leipzig, den 29.1.2020

Abgabe: Postfach in A 514 bis Donnerstag, 13.2.2020, 13:00

Es bezeichne wieder $(E, \mathcal{G})$ eine Ebene, die die Axiome $(A1) - (A11)$ erfüllt.

29A.) Es sei Q ein Quadrat in der Ebene E – mit den (entgegen dem Uhrzeigersinn geordneten) Eckpunkten A, B, C, D.

i) Geben Sie alle – acht – Kongruenzabbildungen in E an, die das Quadrat Q auf sich selbst abbilden; diese werden auch *Deckabbildungen des Quadrats* genannt.
Geben Sie diesen acht Kongruenzabbildungen zum Zwecke der weiteren Bearbeitung dieser Aufgabe einen Namen, etwa einen Buchstaben mit Index.

ii) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel für diese acht Kongruenzabbildungen auf. Diese muss nicht näher begründet werden; es sollte aber zumindest kurz gesagt werden, wie die Tabelle zu verstehen ist.

iii) Geben Sie unter den acht aufgeführten Kongruenzabbildungen vier an, die paarweise miteinander vertauschbar sind.

(12 Punkte)

30A.) In E sei ein Dreieck Δ mit den Eckpunkten A, B, C gegeben.

i) Spiegeln Sie dieses Dreieck – zeichnerisch – an jedem der drei Seitenmittelpunkte und verifizieren Sie, dass man auf diese Weise ein Dreieck erhält, das sich aus 4 Teildreiecken zusammensetzt, die alle zu Δ kongruent sind.

ii) Zeigen Sie, dass die Mittelsenkrechten der Seiten des auf diese Weise entstehenden großen Dreiecks die Höhengeraden von Δ sind; dabei sind die drei Höhengeraden eines gegebenen Dreiecks diejenigen Geraden, die die drei Höhen umfassen.

iii) Was folgt für die drei Höhengeraden von Δ ?

(8 Punkte)

31A.) Konstruieren Sie Dreiecke mit folgenden Daten:

i) $b = 7cm$, $h_a = 4cm$, $s_a = 5cm$.

ii) $a = 12cm$, $h_a = 5cm$, $\alpha = 90°$.

iii) $a = 8cm$, $s_a = 6cm$, $\alpha = 65°$.

Dabei ist auch jeweils eine Konstruktionsbeschreibung anzugeben – und zu entscheiden, ob es bis auf Kongruenz nur eine Lösung gibt.

Hinweis: In (mindestens) einem der Aufgabenteile sollte der Peripheriewinkelsatz verwendet werden.

$(3 + 3 + 4 = 10$ Punkte)

b.w.

32A.) Wir identifizieren in dieser Aufgabe E mit der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$, in der die folgenden vier Punkte gegeben sind:

$$A = (0,0),\ B = (\tfrac{1}{2},0),\ C = (\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}),\ D = (0,1).$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Fläche K, die begrenzt wird von den drei Strecken $\overline{DA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und dem Kreisbogen von C zu D auf dem Einheitskreis $C(A,1)$.

(10 Punkte)

33A.) Eine Teilmenge S von E heißt *sternförmig*, falls es ein $Z \in S$ gibt, so dass für jedes $A \in S$ die Verbindungsstrecke $\overline{ZA}$ in S enthalten ist. – Definitionsgemäß ist also jede nichtleere konvexe Menge sternförmig.

i) Definieren Sie irgendeine sternförmige, aber nicht konvexe Teilmenge von E formal, und fertigen Sie auch eine zugehörige Skizze an.

ii) Für eine sternförmige Menge $S \subseteq E$ setzen wir

$$T := T(S) := \{Z \in S \,|\, \text{für alle}\, A \in S \,\text{ist}\, \overline{ZA} \subseteq S\}.$$

Zeigen Sie, dass T konvex ist.

iii) Von zwei verschiedenen Punkten A, B eines Sees kann man jeden anderen Punkt des Sees in geradliniger Fahrt erreichen. Zeigen Sie, dass man auch von jedem Punkt der Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ jeden Seepunkt geradlinig erreichen kann.

Hinweise: Verwenden Sie Aufgabe 11 in ii). – Demnach gilt für drei nicht kollineare Punkte A, B, P: Das von den drei Ecken A, B, P aufgespannte Dreieck ist die Vereinigung aller Seiten $\overline{AQ}$ für $Q \in \overline{BP}$.
Teil iii) folgt leicht aus ii). Um iii) erfolgreich zu lösen, muss ii) nicht bearbeitet worden sein.

(3 + 4 + 3 = 10 Punkte)

34A.) In einem – ebenen – Land startet in jeder Stadt ein Flugzeug und fliegt zur nächstbenachbarten Stadt; dabei nehmen wir an, dass je zwei verschiedene Städte unterschiedliche Entfernungen haben. Zeigen Sie, dass in keiner Stadt mehr als 5 Flugzeuge landen.

Hinweis: Benutzen Sie, dass in einem Dreieck mit verschiedenen Seitenlängen der längsten Seite der größte Innenwinkel gegenüber liegt; das folgt aus Aufgabe 26.)
Folgern Sie daraus: Sind A, B zwei verschiedene Städte, von denen Flugzeuge zu einer dritten gemeinsamen Stadt Z fliegen, so bilden die Strahlen $s(Z, A)$ und $s(Z, B)$ einen Winkel, der größer ist als $60°$.

(10 Punkte)