Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben
Serie 13

## Hinweis

Bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie ferner an, an welchem Wochentag und zu welcher Uhrzeit Ihre Übung stattfindet. Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, 29.01.2020, 09:15 Uhr (als vor Beginn der Vorlesung) im Hörsaal 5 oder im Postfach von S. Hintze in der 5. Etage des Neuen Augusteums ab.

## Aufgabe 1

Gegeben sei die lineare Kongruenz $16x \equiv -9 \pmod{13}$.

a) Zeigen Sie, dass diese Kongruenz lösbar ist. (1P)

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, welche diese Kongruenz lösen. (3P)

c) Geben Sie die drei kleinsten natürlichen Zahlen an, welche zur Lösungsmenge der Kongruenz gehören. (1P)

## Aufgabe 2

In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Graph von

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass kein Gitterpunkt (also kein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten) auf diesem Graphen liegt. (2P)

b) In der ursprünglichen Gleichung soll nur der Nenner 4 durch eine andere natürliche Zahl ersetzt werden, so dass danach Gitterpunkte auf diesem Graphen liegen. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen, für die dies der Fall ist. (3P)

bitte wende

## Aufgabe 3

Die lineare diophantische Gleichung

$$ax - by = c$$

hat die Lösungsmenge

$$L = \{(12 + 3k, 31 + 4k) | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Geben Sie (möglichst einfache) Werte $a, b, c \in \mathbb{Z}$ an, so dass die lineare diophantische Gleichung in der Tat diese Lösungsmenge besitzt.
Lösen Sie anschließend die entstandene lineare diophantische Gleichung, in dem sie diese in eine lineare Kongruenz überführen und diese dann lösen.
Begründen Sie, dass die beiden Lösungsmengen identisch sind. (5P)

## Aufgabe 4

Gegeben sei die lineare diophantische Gleichung

$$ax - my = c$$

mit $a, m, c \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass die folgende Aussagen wahr ist. (5P)

> Die Gleichung ist für alle $c \in \mathbb{Z}$ genau dann lösbar, wenn es ein $\overline{x} \in \mathbb{Z}_m$ mit $\overline{a} \odot \overline{x} = \overline{1}$ gibt.