Wintersemester 2019/20
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

Dr. André Uschmajew
Dr. Max Pfeffer

8. Übungsblatt
Optimierung I

Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt in der Übung am 9.1.2020.

Übungsaufgaben

1. **Newton-Verfahren zur Sattelpunktbestimmung.**
   Gegeben sei die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^\mathsf{T} Ax - x^\mathsf{T} b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   welche unter der Nebenbedinung $\|x\| = 1$ minimiert werden soll.

   (a) Bestimmen Sie alle KKT-Punkte des gleichungsrestringierten Problems.

   (b) Prüfen Sie für alle KKT-Punkte, ob die hinreichende Bedingung 2. Ordnung erfüllt ist.

   (c) Stellen Sie das Lagrange-Newton-Verfahren auf mit $F(x, \mu) = \nabla L(x, \mu)$. Berechnen Sie $F'(x, \mu)$ und führen Sie einen Iterationsschritt ausgehend vom Punkt $x = (1, 1, 0)^\mathsf{T}$ aus.

2. **Unzulässige SQP-Teilprobleme.**
   Bestimmen Sie die Lösung des Problems

$$\min -x_1 - x_2 \quad \text{u.d.N.} \quad -x_1 - x_2 \le 0,\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

   mit den zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren. Skizzieren Sie die Nebenbedingungen des SQP-Teilproblems im Punkt $x = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^\mathsf{T}$ und zeigen Sie, dass sein zulässiger Bereich leer ist.

Hausaufgaben

1. **Abschlussquiz: Restringierte Optimierung.** (8 Punkte)
   Gegeben ist ein allgemeines restringiertes Optimierungsproblem

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) \le 0,\ h(x) = 0$$

   mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ die zulässige Menge. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie.

(i) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kegel mit $M \subset K$. Dann gilt $K^\circ \subset M^\circ$.

(ii) Das Problem sei konvex, d.h. $f, g_1, \ldots, g_m$ konvex und h affin. Dann gilt $X \subseteq T(X, x)$ für alle zulässigen $x \in X$.

(iii) Das Problem sei konvex. Dann sind die Abadie Constraint Qualification und die Guignard Constraint Qualification äquivalent.

(iv) Zu $x \in X, \lambda \in [0, \infty)^m, \mu \in \mathbb{R}^p$ sei $T_+(g, h, x, \lambda) = \mathbb{R}^n$ und die hinreichende Optimalitätsbedingung 2. Ordnung sei für (x, λ, μ) erfüllt. Dann ist x ein lokales Minimum von f auf $\mathbb{R}^n$.

(v) Alle stationären Punkte der Lagrange-Funktion $L(x, \mu)$ (mit $g \equiv 0$) erfüllen die KKT-Bedingungen.

(vi) Alle stationären Punkte der Lagrange-Funktion $L(x, \lambda, \mu)$ sind Sattelpunkte.

(vii) Sei P_α die quadratische Penalty-Funktion. Dann gibt es ein $\alpha > 0$, sodass das Minimum $x(\alpha)$ von P_α für das restringierte Optimierungsproblem zulässig ist.

(viii) Sei f konvex und (x^*, μ^*) ein KKT Punkt des Problems

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad h(x) = 0.$$

Gilt $d^T \nabla^2 f(x^*) d > 0$ für alle $d \neq 0$ mit $\nabla h(x^*)^T d = 0$, so ist x^* ein globales Minimum.

2. **Subgradienten für nicht-glatte Probleme.** (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex aber nicht unbedingt überall differenzierbar. Ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ heißt *Subgradient* von f in x_0, falls

$$f(x) \geq f(x_0) + d^\mathsf{T}(x - x_0), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Das *Subdifferential* $\partial f(x_0)$ ist die Menge aller Subgradienten von f in x_0.

(a) Zeigen Sie, dass x_0 genau dann ein globales Minimum von f ist, falls $0 \in \partial f(x_0)$.

(b) Zeigen Sie, dass durch $d = -\operatorname{argmin}_{z \in \partial f(x_0)} \|z\|$ eine Abstiegsrichtung gegeben ist.[1]

(c) Berechnen Sie das Subdifferential von $f(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

3. **Rosenbrock-Funktion mit Gleichungsnebenbedingungen.** (6 Punkte)

Gesucht ist die Lösung der Rosenbrock-Funktion mit Gleichungsnebenbedingung

$$\min f(x) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2 \quad \text{u.d.N.} \quad x_1^2 + x_2^2 = 2.$$

(a) Bestimmen Sie die KKT-Bedingungen für dieses System. Wenden Sie das Newton-Verfahren an und setzten Sie μ^{k+1} ein, um das lineare Gleichungssystem aufzustellen, das dem lokalen quadratischen Problem entspricht.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Problems mit Hilfe eines einfachen lokalen SQP-Algorithmus: Beginnend beim Startpunkt $(x_1^0, x_2^0, \mu^0) = (2.5, 5, 1)$, löse das quadratische Problem und setze $x^{k+1} = x^k + p^k$. Vergleichen Sie dies mit dem Startpunkt $(x_1^0, x_2^0, \mu^0) = (0.75, 5, 1)$. Was kann man feststellen?

---

[1] Sie dürfen hier die Richtungsableitung

$$f'(x, \xi) = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x + t\xi) - f(x)}{t}$$

verwenden und die Tatsache, dass für f konvex gilt: $f'(x, \xi) = \sup_{z \in \partial f(x)} z^\mathsf{T} \xi$.