

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Physiker 3
Lösungsvorschläge – Blatt 14*

Aufgabe 1 (Fouriertransformation und temperierte Distributionen)

[8* Punkte]

(a) Berechnen Sie mithilfe der Plancherel-Identität das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

HINWEIS: Fouriertransformation der Indikatorfunktion.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$(L, \varphi) := \int_{\mathbb{R}} L(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

mit (i) $L(x) = x^2$ und (ii) $L(x) = |x|$ eine temperierte Distribution definiert wird (Stetigkeit braucht nicht gezeigt zu werden). Berechnen Sie die ersten beiden distributionellen Ableitungen von L .

(c) Berechnen Sie die (distributionelle) Fouriertransformation von x^2 .

LÖSUNG:

(a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass für die Indikatorfunktion

$$\chi_a(x) := \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},$$

des Intervalls $[-a, a]$, $a > 0$, gilt:

$$\widehat{\chi}_a(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ka)}{k},$$

insbesondere also

$$\widehat{\chi}_1(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(k)}{k}.$$

Da $x \mapsto \frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$, folgt aber aus der Plancherel-Identität, dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx &= \left\| \frac{\sin x}{x} \right\|_2^2 = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right\|_2^2 = \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \widehat{\chi}_1 \right) \right\|_2^2 = \frac{\pi}{2} \|\chi_1\|_2^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi_1(x)^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 dx = \pi. \end{aligned}$$

(b) Wir müssen zunächst zeigen, dass L eine lineare Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nach \mathbb{C} definiert. Da

(i) $L(x) = x^2$

(ii) $L(x) = |x|$

beide stetig, also insbesondere lokal integrierbar, und polynomiell beschränkt sind, ist für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

(i) $x^2\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und damit integrierbar,

(ii) $|x|\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ (aber nicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

In beiden Fällen ist also $(L, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} L(x)\varphi(x) dx$ wohldefiniert. Die Linearität von L folgt aus der Linearität des Integrals: für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} (L, \varphi + \lambda\psi) &= \int_{\mathbb{R}} L(x)(\varphi(x) + \lambda\psi(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} L(x)\varphi(x) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} L(x)\psi(x) dx \\ &= (L, \varphi) + \lambda(L, \psi). \end{aligned}$$

Auf die Stetigkeit wollen wir hier nicht eingehen.

Wir berechnen jeweils die ersten beiden distributionellen Ableitungen. Allgemein gilt für beliebige Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$(L', \varphi) = -(L, \varphi') \quad \text{und} \quad (L'', \varphi) = (L, \varphi'').$$

Konkret:

(i) Für $L(x) = x^2$ erhalten wir mittels partieller Integration

$$\left(\frac{d}{dx}x^2, \varphi\right) = -(x^2, \varphi') = -\int_{\mathbb{R}} x^2\varphi'(x) dx = -[x^2\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} 2x\varphi(x) dx = (2x, \varphi)$$

wobei die Randterme verschwinden, da φ schneller als jede Potenz gegen 0 abfällt für $|x| \rightarrow \infty$. Die erste Ableitung der Distribution x^2 ist also die Distribution $2x$. Genauso zeigt man, dass die zweite Ableitung im distributionellen Sinn die Distribution 2 liefert:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2}x^2, \varphi\right) &= \left(\frac{d}{dx}2x, \varphi\right) = -(2x, \varphi') = -\int_{\mathbb{R}} 2x\varphi'(x) dx = -[2x\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} 2\varphi(x) dx \\ &= (2, \varphi), \end{aligned}$$

wobei wir wieder verwendet haben, dass die Randterme wegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ verschwinden.

Analog überlegt man sich leicht: ist $L \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ eine differenzierbare Funktion, so stimmt ihre distributive Ableitung mit der klassischen Ableitung überein.

(ii) Die Funktion $x \mapsto |x|$ ist nur im Ursprung nicht differenzierbar. Dies legt nahe, dass die erste (distributionelle) Ableitung im Wesentlichen die Signum-Funktion

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

sein sollte. In der Tat gilt für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\left(\frac{d}{dx}|x|, \varphi\right) = -(|x|, \varphi') = -\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x) dx = -\int_{-\infty}^0 (-x)\varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} x\varphi'(x) dx.$$

Wir können nun partiell integrieren und, da die Randterme alle verschwinden, erhalten

$$\left(\frac{d}{dx}|x|, \varphi\right) = -\int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn} x \varphi(x) dx = (\operatorname{sgn}, \varphi).$$

Dabei hätten wir die Funktion sgn bei $x = 0$ beliebig definieren können, da $\{0\} \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, und daher die obigen Integrale vom Wert $\operatorname{sgn}(0)$ der Funktion unabhängig sind.

Da sich die sgn -Funktion mithilfe der Heaviside-Funktion Θ darstellen lässt,

$$\operatorname{sgn} x = \Theta(x) - \Theta(-x),$$

und die distributionelle Ableitung von Θ aus der Vorlesung bekannt ist, $\Theta' = \delta$, folgt

$$\frac{d^2}{dx^2}|x| = \frac{d}{dx}(\Theta(x) - \Theta(-x)) = \delta(x) - (-1)\delta(-x) = 2\delta(x),$$

Genauer gilt für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und mit $\tilde{\Theta}(x) := \Theta(-x)$, dass

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}|x|, \varphi\right) = \left(\frac{d}{dx}(\Theta - \tilde{\Theta}), \varphi\right) = \left(\frac{d}{dx}\Theta, \varphi\right) - \left(\frac{d}{dx}\tilde{\Theta}, \varphi\right) = (\delta, \varphi) + (\tilde{\Theta}, \varphi').$$

Weiter ist

$$(\tilde{\Theta}, \varphi') = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\Theta}(x)\varphi'(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \Theta(-x)\varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx = [\varphi(x)]_{-\infty}^0 = \varphi(0) = (\delta, \varphi),$$

also insgesamt

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}|x|, \varphi\right) = 2(\delta, \varphi) = (2\delta, \varphi).$$

- (iii) Die Fouriertransformation von $x \mapsto x^2$ im klassischen Sinn existiert nicht. Fassen wir x^2 als temperierte Distribution auf, so existiert die Fouriertransformierte nicht nur, wir können sie sogar explizit berechnen. Sei dazu $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine beliebige Testfunktion. Dann gilt per Definition

$$(\widehat{x^2}, \varphi) = (x^2, \widehat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \widehat{\varphi}(x) dx.$$

Aufgrund der Eigenschaften der Fouriertransformation (siehe Theorem 11.4, Algebraisierung der Ableitung) gilt aber

$$x^2 \widehat{\varphi}(x) = (-i)^2 \widehat{\varphi''}(x) = -\widehat{\varphi''}(x),$$

und somit

$$(\widehat{x^2}, \varphi) = - \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi''}(x) dx = -\sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \widehat{\varphi''}\right) = -\sqrt{2\pi} (\delta, \varphi'') = \begin{cases} -\sqrt{2\pi} (\delta'', \varphi) \\ -\sqrt{2\pi} \varphi''(0) \end{cases}.$$

Es gilt also im Sinne von Distributionen, dass

$$\widehat{x^2} = -\sqrt{2\pi} \delta''$$

mit der zweiten distributionellen Ableitung der δ -Distribution definiert über

$$(\delta'', \varphi) = (\delta, \varphi'') = \varphi''(0)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2 (Freie Schrödinger Gleichung)

[6* Punkte]

In dieser Aufgabe wollen wir die freie Schrödinger Gleichung

$$i\partial_t \psi(x, t) = -\frac{1}{2} \Delta \psi(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},$$

lösen.

- (a) Begründen Sie, dass für alle $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\psi(x, t) = \left(\mathcal{F}^{-1} e^{-i\frac{k^2}{2}t} \mathcal{F} \psi_0 \right) (x)$$

die Schrödinger Gleichung mit Anfangsbedingung $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$ löst.

- (b) Bestimmen Sie eine Funktion p_t , so dass für alle $t \neq 0$ gilt

$$\psi(x, t) = (p_t * \psi_0)(x).$$

HINWEIS: Zeigen Sie, dass $e^{-it\frac{k^2}{2} - \varepsilon\frac{k^2}{2}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-it\frac{k^2}{2}}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, d.h.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it\frac{k^2}{2} - \varepsilon\frac{k^2}{2}} \varphi(k) dk = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it\frac{k^2}{2}} \varphi(k) dk \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

und verwenden Sie Aufgabe 10.2. [ERGEBNIS: $p_t(x) = (2\pi it)^{-\frac{d}{2}} e^{i\frac{x^2}{2t}}$].

- (c) Begründen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(x, t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_0(x)|^2 dx.$$

HINWEIS: Plancherel-Identität.

- (d) Beweisen Sie, dass für alle $t \neq 0$ gilt

$$|\psi(x, t)| \leq \frac{1}{(2\pi|t|)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_0(y)| dy.$$

LÖSUNG:

- (a) Da $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ können wir den Satz über majorisierte Konvergenz verwenden, um Integration und Differentiation zu vertauschen, und erhalten damit

$$\begin{aligned} i\partial_t \psi(x, t) &= i\partial_t \left(\mathcal{F}^{-1} e^{-i\frac{k^2}{2}t} \mathcal{F} \psi_0 \right) (x) = \left(\mathcal{F}^{-1} i\partial_t e^{-i\frac{k^2}{2}t} \mathcal{F} \psi_0 \right) (x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}^{-1} k^2 e^{-i\frac{k^2}{2}t} \mathcal{F} \psi_0 \right) (x) = \frac{1}{2} (-i)^2 \Delta \left(\mathcal{F}^{-1} e^{-i\frac{k^2}{2}t} \mathcal{F} \psi_0 \right) (x) \\ &= -\frac{1}{2} \Delta \psi(x, t), \end{aligned}$$

wobei wir die Rechenregeln zur Algebraisierung der Ableitung (Theorem 11.4) verwendet haben.

- (b) Wir zeigen zunächst, dass $e^{-it\frac{k^2}{2} - \varepsilon\frac{k^2}{2}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-it\frac{k^2}{2}}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Dazu sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ eine beliebige Testfunktion. Da

$$\left| e^{-it\frac{k^2}{2} - \varepsilon\frac{k^2}{2}} \varphi(k) \right| \leq |\varphi(k)| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R}^d,$$

uniform in $\varepsilon > 0$, folgt aus $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ und dem Satz über majorisierte Konvergenz, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it \frac{k^2}{2} - \varepsilon \frac{k^2}{2}} \varphi(k) dk = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-it \frac{k^2}{2} - \varepsilon \frac{k^2}{2}} \varphi(k) dk = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it \frac{k^2}{2}} \varphi(k) dk.$$

Wir würden nun gerne berechnen

$$\psi(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-i \frac{k^2}{2} t} \widehat{\psi_0} \right] (x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \left(\mathcal{F}^{-1} \left[e^{-i \frac{k^2}{2} t} \right] * \psi_0 \right) (x),$$

d.h. $p_t(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-i \frac{k^2}{2} t} \right] (x)$. Wegen $|e^{-i \frac{k^2}{2} t}| = 1$ ist die Funktion aber weder in L^1 noch in L^2 , sodass die inverse Fouriertransformierte (im klassischen Sinn) nicht existiert. Es gilt jedoch $k \mapsto e^{-i \frac{k^2}{2} t} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, damit besitzt die Funktion eine distributionelle (inverse) Fouriertransformierte, die wir wegen $e^{-it \frac{k^2}{2} - \varepsilon \frac{k^2}{2}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-it \frac{k^2}{2}}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ auch berechnen können als Limes von $\mathcal{F}^{-1} \left[e^{-it \frac{k^2}{2} - \varepsilon \frac{k^2}{2}} \right]$. Durch die Regularisierung mit $\varepsilon > 0$ können wir die inverse Fouriertransformierte sogar im klassischen Sinn berechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-it \frac{k^2}{2} - \varepsilon \frac{k^2}{2}} \right] (x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it \frac{k^2}{2} - \varepsilon \frac{k^2}{2}} e^{ik \cdot x} dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left[- \left(\left(\frac{\varepsilon + it}{2} \right)^{\frac{1}{2}} k - i \left(\frac{1}{2(\varepsilon + it)} \right)^{\frac{1}{2}} x \right)^2 - \frac{x^2}{2(\varepsilon + it)} \right] dk. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir den Exponenten durch quadratisches Ergänzen umgeformt,

$$-it \frac{k^2}{2} - \varepsilon \frac{k^2}{2} + ik \cdot x = -\frac{1}{2}(\varepsilon + it)k^2 + ik \cdot x = - \left(\left(\frac{\varepsilon + it}{2} \right)^{\frac{1}{2}} k - i \left(\frac{1}{2(\varepsilon + it)} \right)^{\frac{1}{2}} x \right)^2 - \frac{x^2}{2(\varepsilon + it)}.$$

Man beachte, dass wegen $\operatorname{Re} \varepsilon > 0$ beide Wurzelausdrücke als Wurzeln komplexer Zahlen $z \in \mathbb{C}_-$ für alle $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert sind (vgl. Übungsaufgabe 10.1), denn

$$\frac{\varepsilon + it}{2} \in \mathbb{C}_-, \quad \frac{1}{2(\varepsilon + it)} = \frac{\varepsilon - it}{2(\varepsilon^2 + t^2)} \in \mathbb{C}_-.$$

Wegen $\operatorname{Re} \frac{\varepsilon + it}{2} > 0$ können wir Aufgabe 10.2 anwenden (in jeder Komponente) und erhalten

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left[- \left(\left(\frac{\varepsilon + it}{2} \right)^{\frac{1}{2}} k - i \left(\frac{1}{2(\varepsilon + it)} \right)^{\frac{1}{2}} x \right)^2 \right] dk = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{2\pi}{\varepsilon + it} \right)^{\frac{d}{2}} = \frac{1}{(\varepsilon + it)^{\frac{d}{2}}}.$$

Es folgt, dass

$$\mathcal{F}^{-1} \left[e^{-it \frac{k^2}{2} - \varepsilon \frac{k^2}{2}} \right] (x) = \frac{1}{(\varepsilon + it)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2(\varepsilon + it)}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(it)^{\frac{d}{2}}} e^{i \frac{x^2}{2t}},$$

und damit

$$\mathcal{F}^{-1} \left[e^{-it \frac{k^2}{2}} \right] (x) = \frac{1}{(it)^{\frac{d}{2}}} e^{i \frac{x^2}{2t}}$$

im distributionellen Sinn. Mit majorisierter Konvergenz erhält man dann

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-i \frac{k^2}{2} t} \widehat{\psi_0} \right] (x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-i \frac{k^2}{2} t - \varepsilon \frac{k^2}{2}} \widehat{\psi_0} \right] (x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-i \frac{k^2}{2} t - \varepsilon \frac{k^2}{2}} \right] * \psi_0 \right) (x) \\ &= (p_t * \psi_0)(x) \end{aligned}$$

mit

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\pi it)^{\frac{d}{2}}} e^{i \frac{x^2}{2t}}.$$

(c) Die Behauptung folgt aus zweifacher Anwendung des Satzes von Plancherel,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(x, t)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left(\mathcal{F}^{-1} e^{-i\frac{k^2}{2}t} \mathcal{F} \psi_0 \right) (x) \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-i\frac{k^2}{2}t} (\mathcal{F} \psi_0) (k) \right|^2 dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathcal{F} \psi_0) (k)|^2 dk = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_0(x)|^2 dx.\end{aligned}$$

(d) Setzt man die Darstellung aus Teilaufgabe (b) ein, so erhält man

$$|\psi(x, t)| = |(p_t * \psi_0)(x)| = \left| \frac{1}{(2\pi i t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\frac{(x-y)^2}{2t}} \psi_0(y) dy \right| \leq \frac{1}{(2\pi |t|)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_0(x)|^2 dx.$$

Aufgabe 3 ([W] Euler'sche Differentialgleichungen)**[5* Punkte]**Betrachten Sie die Differentialgleichung für $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x^2 y''(x) + (2a + 1)xy'(x) + by(x) = r(x) \quad (\star)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Zeigen Sie: Ist y Lösung der Differentialgleichung für $x > 0$, so genügt die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := y(e^t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + 2a\dot{\varphi}(t) + b\varphi(t) = r(e^t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\star\star)$$

- (b) Sei φ_0 eine Lösung der Differentialgleichung $(\star\star)$. Geben Sie sämtliche Lösungen φ der Differentialgleichung $(\star\star)$ an. (Fallunterscheidung!)
- (c) Bestimmen Sie den Lösungsraum \mathcal{L} der Differentialgleichung (\star) .

LÖSUNG: Die Euler'sche Differentialgleichung ist ein Beispiel für eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit nicht-konstanten Koeffizienten, die sich jedoch durch eine geeignete Transformation auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten bringen lässt.

- (a) Man berechnet leicht, dass für $\varphi(t) = y(e^t)$ gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= y'(e^t)e^t, \\ \ddot{\varphi}(t) &= y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) + 2a\dot{\varphi}(t) + b\varphi(t) &= y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t + 2ay'(e^t)e^t + by(e^t) \\ &= y''(e^t)e^{2t} + (2a + 1)y'(e^t)e^t + by(e^t). \end{aligned}$$

Ist nun y eine Lösung von (\star) für $x > 0$, so folgt mit $x = e^t$, dass

$$\ddot{\varphi}(t) + 2a\dot{\varphi}(t) + b\varphi(t) = y''(e^t)e^{2t} + (2a + 1)y'(e^t)e^t + by(e^t) = r(e^t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

- (b) Da es sich bei $(\star\star)$ um eine lineare inhomogene Differentialgleichung handelt, ist der Lösungsraum \mathcal{L} gegeben durch

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{hom}} + \varphi_0,$$

wobei \mathcal{L}_{hom} den Lösungsraum der homogenen Gleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + 2a\dot{\varphi}(t) + b\varphi(t) = 0$$

bezeichnet. Die Differentialgleichung ist von der Ordnung 2, damit gilt $\dim \mathcal{L} = \dim \mathcal{L}_{\text{hom}} = 2$. Wir bestimmen die Fundamentallösungen der homogenen Gleichung, indem wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$$

bestimmen. Diese sind gegeben durch

FALL 1: $a^2 > b$. In diesem Fall sind die beiden reellen Nullstellen von p gegeben durch $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$, der Lösungsraum der homogenen Gleichung ist damit

$$\mathcal{L}_{\text{hom}} = \text{span} \left\{ e^{(-a + \sqrt{a^2 - b})t}, e^{(-a - \sqrt{a^2 - b})t} \right\}.$$

FALL 2: $a^2 = b$. In diesem Fall besitzt das charakteristische Polynom eine doppelte Nullstelle bei $\lambda_0 = -a$, liefert uns daher nur eine Fundamentallösung e^{-at} . Eine zweite, linear unabhängige Lösung ist gegeben durch te^{-at} , sodass der Lösungsraum in diesem Fall gegeben ist durch

$$\mathcal{L}_{\text{hom}} = \text{span} \{e^{-at}, te^{-at}\}.$$

FALL 3: $a^2 < b$. In diesem Fall sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms komplex, $\lambda_{3,4} = -a \pm i\sqrt{b - a^2}$. Eine Basis des (komplexen) Lösungsraums der homogenen Gleichung ist daher $\{e^{\lambda_3 t}, e^{\lambda_4 t}\}$. Da in diesem Fall Realteil und Imaginärteil zwei reelle linear unabhängige Lösungen sind, können wir den (reellen) Lösungsraum auch schreiben als

$$\mathcal{L}_{\text{hom}} = \text{span} \left\{ e^{-at} \cos \left(t\sqrt{b - a^2} \right), e^{-at} \sin \left(t\sqrt{b - a^2} \right) \right\}.$$

(c) Den Lösungsraum der ursprünglichen Gleichung (für $x > 0$) erhält man nun durch Rücksubstitution $t = \log x$, d.h. bezeichnet $y_0(x) = \varphi_0(\log x)$, so gilt

FALL 1: $a^2 > b$: $\mathcal{L} = y_0 + \text{span} \left\{ x^{-a+\sqrt{a^2-b}}, x^{-a-\sqrt{a^2-b}} \right\}$

FALL 2: $a^2 = b$: $\mathcal{L} = y_0 + \text{span} \{x^{-a}, x^{-a} \log x\}$

FALL 3: $a^2 < b$: $\mathcal{L} = y_0 + \text{span} \left\{ x^{-a} \cos \left(\log x \sqrt{b - a^2} \right), x^{-a} \sin \left(\log x \sqrt{b - a^2} \right) \right\}.$