4.4. Energiemethode

Theorem 4.7: (Energiegleichung)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit C^1-Rand

$$u \in C^2(U \times (0,T)) \cap C^1(\overline{U \times (0,T)}) \quad \text{mit} \quad (W1) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } U \times (0 \\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } U \times \{0 \\ u = 0 & \text{auf } \partial U \times \end{cases}$$

dann ist $E(t) := \frac{1}{2} \cdot \int_U |u_t|^2 + |Du|^2$ konstant d.h. $E(t) = E(0)\ \forall t \in [0,$

Beweis:

$$E'(t) = \int_U u_t u_{tt} + Du \cdot D u_t \, dy$$

$$= \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \, dS + \int_U u_t (u_{tt} - \Delta u) \, dy = 0$$

$u_t = 0$ auf $\partial U \times (0,T)$ da $u = 0$ auf $\partial U \times (0,T$

$\Rightarrow E(t) = E(0)$ $\square$

Korollar 4.8: (Eindeutigkeit)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit C^1-Rand, dann existiert höchstens eine Lösung in $C^2(U \times (0,T)) \cap C^1(\overline{U \times (0,T)})$ von

$$(W2) \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{in } U \times (0,T) \\ u = \tilde{g} & \text{auf } \partial U \times (0,T) \\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } U \times \{0\} \end{cases}$$

Beweis: Seien u_1, u_2 Lösungen von (W2) so löst

$u = u_2 - u_1$ (W1) mit $u = 0$, $u_t = 0$ auf $U \times \{0\}$

$\Rightarrow |u_t|^2 = |Du|^2 = 0$ auf $U \times (0,T)$

$\Rightarrow \quad u \equiv 0$ $\square$

Proposition 4.9.: (lokale Energiegleichung)

Sei $u \in C^2(W \times (0,T))$ eine Lösung von

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{in } W \times (0,T)$$

dann ist für jedes $B_r(x) \subset W$

$$e(t) = \int_{B_{r-t}(x)} \tfrac{1}{2}|u_t|^2 + \tfrac{1}{2}|Du|^2 \, dy \qquad \text{monoton fallend auf } 0 < t < \min\{r, T\}$$

Beweis:

$$e'(t) = -\int_{\partial B_{r-t}(x)} \tfrac{1}{2}|u_t|^2 + \tfrac{1}{2}|Du|^2 \, dS + \int_{\partial B_{r-t}(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot u_t \, dS$$

$$+ \int_{B_{r-t}(x)} u_t (u_{tt} - \Delta u) \, dy$$

$$= -\int_{\partial B_{r-t}(x)} \tfrac{1}{2}\left(|u_t|^2 + |Du|^2 - 2\frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot u_t \right) \leq 0$$

aber

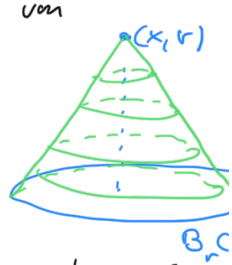
$$|u_t|^2 + |Du|^2 - 2\frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot u_t \geq |u_t|^2 + |Du|^2 - 2|Du||u_t|$$
$$= (|u_t| - |Du|)^2 \geq 0$$

$\square$

Korollar 4.10: (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit)

Sei $u \in C^2(W \times (0,T)) \cap (C^1(\overline{W \times (0,T)}))$ eine Lösung von

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{auf } W \times (0,T)$$



Falls $u = 0$ auf $B_r(x) \times \{0\}$, $B_r(x) \subset W$

$$\Rightarrow \quad u \equiv 0 \quad \text{auf} \bigcup_{0 < t < \min\{r,T\}} B_{r-t}(x) = \{(y,t) : |y - x| \leq r - t, \; 0 \leq t < \min\{r, T\}\}$$

Beweis: $e(0) = 0 \quad \Rightarrow 0 < e(t) \leq e(0) = 0 \quad \forall \; 0 \leq t < \min\{T, r$

Theorem 4.11: (Globale Energiegleichung)

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ eine Lösung von

$$(W3) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = g, \; u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

Falls $E(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|h|^2 + \frac{1}{2}|Dg|^2 < \infty \Rightarrow E(t) = E(0) \; \forall t$

Beweis: Wir definieren $\tilde{e}(y,t) := \frac{1}{2}\left(|u_t|^2 + |Du|^2\right)(y,t)$. Falls $T = +\infty$ fixiere ein $T < \infty$ und betrachte (W3) auf dem Intervall $[0,T]$

nach Prop. 4.9 gilt für $e(R;t) := \int_{B_{R+T-t}} \tilde{e}(y,t)\,dy$ dass

$$e'(R;t) = \int_{\partial B_{R+T-t}} -\frac{1}{2}\left(|u_t|^2 + |Du|^2 - \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot u_t\right) dS(y)$$

$$\leq -\frac{1}{2} \cdot \int_{\partial B_{R+T-t}} \left| |u_t| - |Du| \right|^2 dS(y)$$

$$\geq -\frac{1}{2} \cdot \int_{\partial B_{R+T-t}} \left| |u_t| + |Du| \right|^2 dS(y)$$

$$\geq - \int_{\partial B_{R+T-t}} |u_t|^2 + |Du|^2 \, dS(y)$$

$\Rightarrow$ (i)

$$e(R;t) \leq e(R;0) \leq E(0) \quad \forall t < T, \; R > 0$$

$$\overset{\Rightarrow}{(R \to \infty)} \quad E(t) \leq E(0) \quad \forall t \leq T$$

(ii) $$T E(0) \geq \int_0^T E(t)\,dt = \int_0^T \int_0^\infty \int_{\partial B_r} \tilde{e}(y,t)\,dS(y)\,dr\,dt$$

$$\geq \int_T^\infty \int_0^T \int_{\partial B_{r+T-t}} \tilde{e}(y,t)\,dS(y)\,dt$$

d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\; r_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ mit

(i) $$\int_{B_{r_\varepsilon + T}} \tilde{e}(y,0)\,dy \geq E(0) - \varepsilon$$

(ii) $$\int_0^T \int_{\partial B_{r_\varepsilon + T - t}} \tilde{e}(y,t)\,dS(y)\,dt \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow E(T) - E(0) + \varepsilon \geq e(r_\varepsilon; T) - e(r_\varepsilon, 0) = \int_0^T e'(r_\varepsilon; t)\,dt$$

$$\geq -2 \int_0^T \int_{\partial B_{r_\varepsilon + T - t}} \tilde{e}(y,t)\,dS(y)\,dt \geq -2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad E(T) \geq E(0) - 3\varepsilon$$

$\square$