Wintersemester 2019/20 Dr. André Uschmajew
Fakultät für Mathematik und Informatik Dr. Max Pfeffer
Universität Leipzig

10. Übungsblatt
Optimierung I

Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt in der Übung am 23.1.2020.

Übungsaufgaben

1. **Eliminierung dominanter Zeilen und Spalten.**

   Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Auszahlungsmatrix in einem Matrixspiel. Wir sagen, dass Zeile r Zeile s *dominiert*, $r, s \in \{1, \dots, m\}$, falls $a_{rj} \geq a_{sj}$ für alle $j = 1, \dots, n$ (und analog für die Spalten). Zeigen Sie:

   (a) Wenn eine Zeile r eine andere dominiert, dann hat der Zeilenspieler eine optimale Strategie $y^* \in \mathbb{R}^m$ mit $y_r^* = 0$.

   (b) Wenn eine Spalte s von einer anderen dominiert ist, dann hat der Spaltenspieler eine optimale Strategie $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $x_s^* = 0$.

   (c) Benutzen Sie dies, um die folgende Ertragsmatrix zu einer (2×2)-Matrix zu reduzieren:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & -2 & -9 & -1 \\ -7 & 3 & -3 & -8 & -2 \\ 2 & -3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. **Ein Ratespiel.**

   Spieler A und B wählen jeder eine Zahl zwischen 1 und 100. Das Spiel ist unentschieden, falls beide Spieler die gleiche Zahl wählen. Andernfalls gewinnt der Spieler, der die kleinere Zahl gewählt hat, außer wenn diese genau eins kleiner ist als die des Gegners. In diesem Fall gewinnt der Gegner. Finden Sie die optimale Strategie für dieses Spiel.

3. **Simplexmethode.**

   Betrachten Sie das Problem

$$\begin{aligned} \min -4x_1 - 2x_2 \quad & \text{u.d.N.} \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 &= 8 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

   und lösen Sie dieses mit Hilfe der Simplexmethode, beginnend mit der Basis $\mathcal{B} = \{3, 4\}$.

Hausaufgaben

1. **Morra.** (8 Punkte)

   Zwei Spieler verstecken entweder einen oder zwei Euro. Dann zeigen sie gleichzeitig einen oder zwei Finger und rufen dabei ihre Vermutung, wieviele Euro der andere versteckt hat. Wenn ein Spieler richtig rät aber sein Gegner nicht, so erhält er den Gesamtbetrag, der versteckt wurde. In allen anderen Fällen geht das Spiel unentschieden aus.

   (a) Geben Sie die Auszahlungsmatrix an.

   (b) Formulieren Sie das lineare Problem aus Sicht des Zeilenspielers.

   (c) Was ist der Wert des Spiels?

   (d) Finden Sie die stochastischen Vektoren für eine optimale Strategie.

2. **Das Minimax-Theorem.** (5 Punkte)

   Benutzen Sie das Minimax-Theorem, um zu zeigen, dass

   $$\max_x \min_y y^{\mathsf{T}} Ax = \min_y \max_x y^T Ax$$

   für stochastische Vektoren x und y, also $x \geq 0, y \geq 0, \sum x_i = \sum y_i = 1.$ [1]

3. **Simplexmethode mit Schlupfvariablen.** (7 Punkte)

   Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

   $$\begin{aligned} \min -5x_1 - x_2 \quad & \text{u.d.N.} \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\leq 8 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

   (a) Fügen Sie Schlupfvariablen x_3 und x_4 ein, um das Problem in Standardform zu bringen.

   (b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Simplexmethode, wobei in jedem Schritt die Basis und die Vektoren λ, s_N und x_B sowie der Wert der Zielfunktion angegeben werden sollen. [2]

[1] Hinweis: Beachten Sie, dass die schwache Dualität

$$\max_x \min_y y^{\mathsf{T}} Ax \leq \min_y \max_x y^T Ax$$

immer gilt.

[2] Die anfängliche Wahl von $\mathcal{B}$ mit $x_B \geq 0$ ist offensichtlich, sobald Sie die Schlupfvariablen in Teil (a) hinzugefügt haben.