

Übungen zur Vorlesung  
**Mathematik 3 für Physiker**  
Blatt 2

**Aufgabe 1 (3 Punkte).** Sei  $I$  ein offenes Intervall. Zeige, dass jede Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  der Differenzialgleichung

$$y' = -2xy$$

von der Form  $y(x) = ce^{-x^2}$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  ist.

**Aufgabe 2 (3 Punkte).** Bestimme alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = (1 + y^2)x$$

mit den Anfangsbedingungen  $y(0) = 0$  beziehungsweise  $y(\sqrt{\pi}) = 0$ . Bestimme insbesondere die maximalen Definitionsbereiche der Lösungen

**Aufgabe 3 (3 Punkte).** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $I$  ein offenes Intervall das die 0 nicht enthält. Zeige, dass  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist, genau dann wenn

$$u : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{y(x)}{x}$$

die Differenzialgleichung

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

löst.

**Aufgabe 4 (3 Punkte + 2 Zusatzpunkte).** Bestimme alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = \left| \frac{y}{x} \right|$$

mit den Anfangsbedingungen  $y(1) = 1$  beziehungsweise  $y(1) = -1$ . Bestimme insbesondere die maximalen Definitionsbereiche der Lösungen.

Zusatzfrage: Bestimme alle Lösungen des Anfangswertproblems mit den Anfangsbedingungen  $y(1) = 0$ .

**Aufgabe 5 (3 Punkte).** Zeige, dass  $e^x e^y = e^{(x+y)}$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Hinweis: Die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems  $y' = y$ ,  $y(0) = y_0$  kann vorausgesetzt werden (siehe Beispiel 4.4).

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind (vielleicht) in der Vorlesung am Dienstag, dem 29.10.2019 abzugeben.