Abgabe des Blattes während der Vorlesung am Mittwoch, den 8.01.

Sprechstunde bei Victor Marx (A328) jeden Freitag, 15:30 Uhr bis 17:00 Uhr.

Aufgabe 1: 2+1+2 Punkte

Momente der Chiquadrat- und t-Verteilungen.

Seien Y, T reelle Zufallsvariablen mit Verteilungen χ_n^2 bzw. t_n.

i) Die Gamma-Funktion Γ ist durch

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} \mathrm{d}t$$

definiert. Auf welches reelle Intervall I ist Γ definiert? Sei $p \in I$. Zeigen Sie:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

(Bitte beachten, dass die Formel im Skript falsch ist!) Sei p jetzt eine natürliche Zahl: $\Gamma(p)$ bestimmen.

ii) Zeigen Sie: für alle $k < n$ gilt

$$\mathbb{E}[Y^{-k/2}] = \frac{\Gamma(\frac{n-k}{2})}{2^{k/2}\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

iii) Bestimmen Sie die Momente von T bis zur Ordnung $n-1$ und zeigen Sie, dass das n-te Moment von T nicht existiert.

Definition der Dirichlet-Verteilung. Sei $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$. Sei $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_s) \in (0, +\infty)^s$. Die Dirichlet-Verteilung D_ρ ist die Verteilung auf $[0,1]^{s-1}$, die durch die folgende Gleichung definiert ist:

$$D_\rho(A) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^s \rho_i)}{\prod_{i=1}^s \Gamma(\rho_i)} \int_{[0,1]^{s-1}} \mathbb{1}_A(\nu) \prod_{i=1}^{s-1} \nu_i^{\rho_i - 1} \left(1 - \sum_{j=1}^{s-1} \nu_j\right)^{\rho_s - 1} \mathrm{d}\nu_1 \dots \mathrm{d}\nu_{s-1},$$

für alle $A \in \mathcal{B}([0,1]^{s-1})$.

Aufgabe 2: 2+4 Punkte

i) Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$T(x_1, \dots, x_s) = \left(\sum_{i=1}^s x_i, \frac{x_1}{\sum_{i=1}^s x_i}, \dots, \frac{x_{s-1}}{\sum_{i=1}^s x_i}\right)$$

von $(0, +\infty)^s$ nach $(0, +\infty) \times (0,1)^{s-1}$. Die Umkehrfunktion T^{-1} und die Jacobi-Determinante (oder Funktionaldeterminante) $|\det DT^{-1}(u, v_1, \dots v_{s-1})|$ bestimmen.

ii) Seien $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}, \alpha > 0, \rho \in (0,+\infty)^s$. Seien $X_1, \ldots, X_s$ unabhängige Zufallsvariablen mit Gamma-Verteilung $\Gamma_{\alpha,\rho_1}, \ldots, \Gamma_{\alpha,\rho_s}$. Sei $S = \sum_{i=1}^s X_i$. Zeigen Sie: Der Zufallsvektor $(X_i/S)_{1\leqslant i\leqslant s-1}$ ist unabhängig von S und besitzt die Dirichlet-Verteilung D_ρ.

Aus WT I: man sagt, dass eine Folge von reellen Zufallsvariablen $(X_n)_n$ stochastisch gegen X konvergiert, und schreibt $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$, wenn für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Man sagt, dass $(X_n)_n$ in Verteilung gegen X konvergiert (oder auch schwach konvergiert), und schreibt $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$, wenn für alle stetigen beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)].$$

$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ ist äquivalent zu: für alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die einem kompakten Träger haben,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)].$$

Wenn X die Verteilung μ hat, schreibt man auch $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mu$ anstatt $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$.

Aufgabe 3: 6 Punkte

Seien $(X_n)_n$ und $(Y_n)_n$ zwei Folgen von reellen Zufallsvariablen (nicht unbedingt unabhängig) und X eine reelle Zufallsvariable, sodass $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ und $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$. Zeigen Sie: $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$.

Aufgabe 4: 6+3 Punkte

Sei S_n eine Zufallsvariable mit Chiquadrat-Verteilung χ^2_n. Sei $\mathcal{N}_{0,1}$ die standarte Normalverteilung.

i) Sei $(X_n)_n$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$ und existierender Varianz $v = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_1] > 0$. Sei $m = \mathbb{E}[X_1]$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(m) \neq 0$ und beschränktem f''. Zeigen Sie: für $n \to \infty$ gilt

$$\sqrt{\frac{n}{v}}\frac{1}{f'(m)}\left(f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) - f(m)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{0,1}.$$

Hinweis: verwenden Sie die Taylor-Entwicklung von f im Punkt m und verwenden Sie die Markov-Ungleichung. Aufgabe 3 kann auch helfen.

ii) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2S_n} - \sqrt{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{0,1}$.