

Übungsblatt 9

- 1) Entscheiden Sie für jede der nachstehenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, ob Konvergenz und ob absolute Konvergenz vorliegt.

$$(a) \ z_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2019}}, (b) \ z_n = \frac{(-1)^n n + i^n}{n^2}, (c) \ z_n = (-1)^n \frac{n+2}{n^2+4}$$

1+1+3 Punkte

- 2) Seien a_n, b_n reell und mögen $\sum_n a_n^2$ sowie $\sum_n b_n^2$ konvergieren. Man zeige, dass dann auch $\sum_n a_n b_n$ konvergiert.

Ist mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergent?

5 + 1 Punkte

- 3) Zeigen Sie, dass für alle $z, u \in \mathbb{C}$

$$\cos(z+u) = \cos(z)\cos(u) - \sin(z)\sin(u), \sin(z+u) = \sin(z)\cos(u) + \cos(z)\sin(u).$$

Begründen Sie Ihre Argumentation sorgfältig!! [Hinweis: Betrachten Sie die Eulerschen Formeln für $\exp(\pm i(z+u))$.]

5 Punkte

- 4) Sei ON die Menge aller natürlichen Zahlen n , deren Dezimalentwicklung keine Ziffer "9" enthält, also

$$n = \sum_{l=0}^k a_l 10^l \text{ wobei } k \in \mathbb{N}_0, \forall l : a_l \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ und } a_k \neq 0.$$

Beweisen Sie, dass

$$\sum_{\substack{n=2 \\ n \in ON}}^{\infty} \frac{1}{n} < 100.$$

[Hinweis: Eine geeignete Zerlegung in Blöcke könnte wieder nützlich sein.] 8 Punkte

Abgabe: am 19.12.2019, 17.10 Uhr Hörsaal 9

Die (Übungsschein-)Klausur findet am 6.2.2020 von 17-19 Uhr statt.