

Mathematik für Physiker 3

Tobias Ried

6. Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 10. Elemente der komplexen Analysis	1
1. Komplexe Differenzierbarkeit	1
2. Der Integralsatz von Cauchy	3
3. Identitätssatz und analytische Fortsetzung	12
4. Laurentreihen	15
5. Residuenkalkül	18
6. Anwendung: Ebene Potentialprobleme	24
Kapitel 11. Fouriertransformation und Grundzüge der Distributionentheorie	29
1. Definition der Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^d)$	29
2. Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^d)$	34
3. Ausblick: Temperierte Distributionen	36
4. Anwendung: Green'sche Funktion des Laplace-Operators	40
Kapitel 12. Partielle Differentialgleichungen – eine Übersicht	43
1. Partielle Differentialgleichungen	43
2. Beispiel: Eindimensionale homogene Wellengleichung	43
Literaturverzeichnis	47

Elemente der komplexen Analysis

1. Komplexe Differenzierbarkeit

DEFINITION 10.1 (KOMPLEXE DIFFERENZIERBARKEIT). Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, heißt *komplex differenzierbar* in $z_0 \in U$, falls

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \quad (10.1)$$

existiert.

Ist f überall in U komplex differenzierbar, so nennt man f *holomorph* auf U . Auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktionen nennt man auch *ganz*.

Äquivalent zur obigen Definition ist die Existenz einer komplexen Zahl $a \in \mathbb{C}$ so, dass

$$f(z) - f(z_0) - a(z - z_0) = o(|z - z_0|),$$

das heißt für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|z - z_0| < \delta, \quad z \in U \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0) - a(z - z_0)| \leq \epsilon |z - z_0|.$$

In diesem Fall gilt $a = f'(z_0)$.

THEOREM 10.2 (RECHENREGELN).

- (a) Ist f komplex differenzierbar in z_0 , dann ist f stetig in z_0 .
 (b) Sind f, g komplex differenzierbar in z_0 so sind auch die Funktionen $f+g$ und fg komplex differenzierbar in z_0 und es gilt

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

Ist ferner $g(z_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ komplex differenzierbar in z_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

- (c) Kettenregel: Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $V \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $f(U) \subseteq V$. Sei weiter $g : V \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert und es gilt: Falls f komplex differenzierbar ist in $z_0 \in U$ und g komplex differenzierbar ist in $f(z_0) \in V$, dann ist $g \circ f$ komplex differenzierbar in z_0 mit

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

- (d) Lokale Umkehrfunktion: Ist f komplex differenzierbar in z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$, und existiert ein $\delta > 0$ so, dass $f : B_\delta(z_0) \rightarrow U$, $U \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet¹, bijektiv ist, dann ist die Umkehrfunktion komplex differenzierbar in $f(z_0)$ und es gilt

$$g'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

BEMERKUNG. (i) Die Menge $B_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ bezeichnet die offene Kreisscheibe um z_0 mit Radius δ .

¹d.h. U nichtleer, offen und zusammenhängend

- (ii) Wir werden später sehen, dass, falls f holomorph in $U \subseteq \mathbb{C}$ ist und $f'(z_0) \neq 0$ für ein $z_0 \in U$, dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass $f|_{B_\delta(z_0)}$, die Einschränkung von f auf $B_\delta(z_0)$, bijektiv ist.

1.1. Komplexe versus reelle Differenzierbarkeit. Wir betrachten nun f als Funktion von $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$,

$$\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x + iy) \\ \operatorname{Im} f(x + iy) \end{pmatrix},$$

wobei wir $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ identifizieren und $\tilde{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in U\}$.

Ist f komplex differenzierbar in $z \in U$, so gilt für $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right] \\ &= \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y), \end{aligned}$$

sowie, da der Limes in (10.1) als Limes in \mathbb{C} unabhängig von der gewählten Folge ist,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{ih} + i \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{ih} \right] \\ &= -i \partial_y u(x, y) + \partial_y v(x, y). \end{aligned}$$

Da zwei komplexe Zahlengenau dann übereinstimmen, wenn Real- und Imaginärteil übereinstimmen, muss also gelten:

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, y) &= \partial_y v(x, y) \\ \partial_y u(x, y) &= -\partial_x v(x, y). \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen, die der Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion erfüllen müssen, werden üblicherweise als *Cauchy-Riemann-Gleichungen* bezeichnet.

Ist umgekehrt die Funktion $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ in (x, y) reell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemannschen Gleichungen, so ist

$$D\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x u & -\partial_x v \\ \partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix} (x, y) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mit $a = \partial_x u(x, y)$ und $b = \partial_x v(x, y)$. Aufgefasst als lineare Abbildung auf \mathbb{R}^2 stellt diese Matrix eine Drehstreckung dar (man überzeuge sich davon!). Somit gilt aufgrund der reellen Differenzierbarkeit in (x, y) für beliebiges $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ (so dass $(x, y) + h \in \tilde{U}$):

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x+h_1, y+h_2) - \tilde{f}(x, y) &= D\tilde{f}(x, y)h + o(|h|) \\ &= \begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix} + o(|h|) \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a+ib)(h_1+ih_2) \\ \operatorname{Im}(a+ib)(h_1+ih_2) \end{pmatrix} + o(|h|). \end{aligned}$$

Es folgt also für $h = h_1 + ih_2$, dass

$$f(z+h) - f(z) = (a+ib)h + o(|h|),$$

das heißt f ist komplex differenzierbar in $z = x + iy$ mit $f'(z) = a + ib$.

Zusammenfassend haben wir also gezeigt:

THEOREM 10.3 (CAUCHY-RIEMANN). *Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, ist genau dann in $z = x + iy \in U$ komplex differenzierbar, falls $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ in (x, y) (reell) differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y),\end{aligned}$$

wobei $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$.

1.2. Beispiele.

(i) Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C},$$

mit Konvergenzradius $\rho \in (0, \infty]$ sind auf $B_\rho(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ holomorph. Es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

In der Übung werden wir sehen, dass f auf $B_\rho(0)$ sogar unendlich oft differenzierbar und in jedem Punkt in $B_\rho(0)$ analytisch ist, d.h. sich in jedem Punkt $z_0 \in B_\rho(0)$ in eine konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k, \quad b_k \in \mathbb{C},$$

entwickeln lässt.

Insbesondere ist die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = e^{\alpha z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, holomorph auf ganz \mathbb{C} mit $f'(z) = \alpha e^{\alpha z}$.

(ii) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$f'(z) = -\frac{n}{z^{n+1}}.$$

(iii) Nicht komplex differenzierbar sind zum Beispiel

(a) $f(z) = \bar{z} (= x - iy)$, denn die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind in keinem Punkt erfüllt: $\partial_x u = 1 \neq -1 = \partial_y v$.

(b) $f(z) = |z|^2 = z\bar{z} (= x^2 + y^2)$. Hier sind die CR-Gleichungen nur in $z = 0$ erfüllt, für $z = x + iy \neq 0$ gilt $\partial_x u = 2x \neq 0 = \partial_y v$.

2. Der Integralsatz von Cauchy

DEFINITION 10.4 (KOMPLEXE KURVENINTEGRALE (KONTOURINTEGRALE)).

Sei $\gamma \in C^1([a, b], U)$ ² eine Kurve in $U \subset \mathbb{C}$ offen, und sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist das

²Im Folgenden wird damit auch eine stückweise stetig differenzierbare Kurve bezeichnet, d.h. es existiert eine Zerlegung $\{t_j\}_{j=0, \dots, n}$ von $[a, b]$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ so, dass $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]} \in C^1([t_j, t_{j+1}]; U)$ für $j = 0, \dots, n-1$. In diesem Fall definiert man

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

komplexe Kurvenintegral von f entlang der Kurve γ definiert als

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

2.1. Zentrales Beispiel. Beschreibe γ den positiv orientierten Rand der Kreisscheibe $B_r(0)$ in \mathbb{C} , parametrisiert durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto re^{it}, \quad r > 0.$$

Dann gilt für $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} \gamma(t)^n \dot{\gamma}(t) dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.2. Standardabschätzung für komplexe Kurvenintegrale.

LEMMA 10.5 (STANDARDABSCHÄTZUNG). Für jede Kurve $\gamma \in C^1([0, 1]; U)$ und jede stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma} |f(z)| \underbrace{\int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt}_{\text{Länge der Kurve } \gamma}.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \left| \int_0^1 f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |f(\gamma(t))| \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt. \end{aligned}$$

■

2.3. Einfache Version des Integralsatzes von Cauchy.

KOROLLAR 10.6 (ZUM SATZ VON GAUSS-GREEN, SATZ 9.33). Sei $\gamma \in C^1([0, 1]; U)$ eine einfach geschlossene Kurve in $U \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f \in C^1(\tilde{U}; \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

BEWEIS. Sei $A \subset U$ die von γ berandete kompakte Menge. Dann ist mit $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\gamma_1 = \operatorname{Re} \gamma$, $\gamma_2 = \operatorname{Im} \gamma$,

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^1 (u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) + iv(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) (\dot{\gamma}_1(t) + i\dot{\gamma}_2(t)) dt \\ &= \int_0^1 (u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \dot{\gamma}_1(t) - v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t)) dt \\ &\quad + i \int_0^1 (v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \dot{\gamma}_1(t) + u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t)) dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ -v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} + i \int_0^1 \begin{pmatrix} v(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ u(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot ds + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot ds. \end{aligned}$$

Da γ einfach geschlossen ist mit $\gamma = \partial A$ und die Funktionen $u, v \in C^1(U; \mathbb{R})$, können wir den Satz von Gauß–Green (Satz 9.33) anwenden. Es folgt

$$\int_{\gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot ds + i \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot ds = \int_A (-\partial_x v - \partial_y u) d(x, y) + i \int_A (\partial_x u - \partial_y v) d(x, y).$$

Da f holomorph in U ist, gelten die Cauchy–Riemann-Gleichungen, das heißt die Integranden in beiden Ausdrücken verschwinden und wir erhalten

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

■

Um eine (weitreichende) Verallgemeinerung von Korollar 10.6 formulieren zu können, benötigen wir die folgenden Begriffe:

DEFINITION 10.7 (HOMOTOPIE). (i) Eine geschlossene Kurve γ in $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt *null-homotop*, falls sich γ stetig in U auf einen Punkt deformieren lässt. D.h. es gibt eine stetige Funktion $F \in C([0, 1] \times [a, b]; U)$ mit der Eigenschaft, dass $F(0, t) = \gamma(t)$, $F(1, t) = z_0$ für alle $t \in [a, b]$ und ein $z_0 \in U$, sowie $F(s, a) = F(s, b)$ für alle $s \in [0, 1]$.

(ii) Zwei Kurven γ_1 und γ_2 in $U \subset \mathbb{C}$ heißen *homotop* in U , falls die Endpunkte gleich sind und die Verknüpfung

$$\gamma : [0, 2] \rightarrow U, \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [0, 1], \\ \gamma_2(2-t), & t \in (1, 2], \end{cases}$$

eine null-homotope geschlossene Kurve ist.

Anschaulich heißt das, dass γ_1 sich bei festen Randpunkten in U stetig in γ_2 überführen lässt.

(iii) Zwei geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ heißen *frei homotop* in U , wenn sie sich in U stetig ineinander deformieren lassen, d.h. es existiert $F \in C([0, 1] \times [a, b]; U)$ so, dass $F(0, t) = \gamma_0(t)$ und $F(1, t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a, b]$.

DEFINITION 10.8. Eine nichtleere Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt

(i) *zusammenhängend*, falls sich je zwei Punkte in U durch eine Kurve in U verbinden lassen.

(ii) *einfach zusammenhängend*, falls sie zusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve in U null-homotop ist.

(iii) *Gebiet*, falls sie offen und zusammenhängend ist.

Beispiele:

(i) \mathbb{C} ist einfach zusammenhängend,

(ii) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist ein nicht einfach zusammenhängendes Gebiet,

(iii) $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

Wir formulieren ohne Beweis

THEOREM 10.9 (INTEGRALSATZ VON CAUCHY, SATZ VON CAUCHY–GOURSAT). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, γ (stückweise) stetig differenzierbare, geschlossene, null-homotope Kurve in U . Dann gilt

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

BEMERKUNGEN. (1) Der Hauptunterschied zu Korollar 10.6 ist, dass f nur als holomorph vorausgesetzt wird, d.h. f' nicht unbedingt stetig sein muss.

(2) Wir werden später sehen, dass eine holomorphe Funktion analytisch (insbesondere unendlich oft komplex differenzierbar) ist.

- (3) Allgemeiner gilt der Satz für *rektifizierbare Kurven*, d.h. für Kurven $\gamma \in C([a, b]; U)$ mit endlicher Länge im folgenden Sinn:

$$\ell(\gamma) := \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n = b} \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $\{t_j\}_{j=0, \dots, n}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ gebildet wird. Man kann zeigen, dass für (stückweise) C^1 Kurven gilt

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Wir werden auf diesen Punkt jedoch nicht näher eingehen.

2.4. Erste Folgerungen aus dem Integralsatz von Cauchy.

KOROLLAR 10.10. (1) Sind γ_1, γ_2 homotope Kurven in U , so gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

für alle $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

- (2) Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Dann ist für beliebiges $z_0 \in U$ die Funktion

$$F(z) = \int_{\gamma: z_0 \rightarrow z} f(\zeta) d\zeta =: \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta,$$

wobei $\gamma : z_0 \rightarrow z$ eine beliebige (stückweise) C^1 Kurve mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z bezeichnet, eine holomorphe Stammfunktion von f , d.h.

$$F'(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

BEWEIS. (1) Die Verknüpfung γ der Kurven γ_1 und γ_2 ist null-homotop, damit gilt wegen der Holomorphie von f nach dem Integralsatz von Cauchy

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2^{-1}} f(z) dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz, \end{aligned}$$

wobei mit γ_2^{-1} die rückwärts durchlaufene Kurve γ_2 bezeichnet wird, also $\gamma_2^{-1}(t) = \gamma_2(1-t)$, $t \in [0, 1]$.

- (2) Seien $z, z_0 \in U$ und $h \in U$ derart, dass $z+h \in U$. Wir bezeichnen mit γ_{z, z_0} eine beliebige Kurve in U mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z . Wegen (1) gilt dann

$$F(z+h) = F(z) + \int_{\gamma_{z+h, z}} f(\zeta) d\zeta.$$

Wir wählen für die Verbindungskurve von z nach $z+h$ eine gerade Linie, also parametrisiert durch

$$\gamma_{z+h, z}(t) = (1-t)z + t(z+h), \quad t \in [0, 1].$$

Dann ist

$$\int_{\gamma_{z+h, z}} d\zeta = \int_0^1 \dot{\gamma}_{z+h, z}(t) dt = \int_0^1 (z+h-z) dt = h,$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z+h,z}} f(\zeta) d\zeta - f(z) \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z+h,z}} d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z+h,z}} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \sup_{\zeta \in \gamma_{z+h,z}} |f(\zeta) - f(z)| \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Standardabschätzung Lemma 10.5 verwendet wurde. Da die Länge von $\gamma_{z+h,z}$ gerade $|h|$ beträgt, und die Kurve innerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_h(z)}$ um z mit Radius $|h|$ liegt, folgern wir

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \sup_{\zeta \in \overline{B_h(z)}} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0$$

für $h \rightarrow 0$, da f holomorph, insbesondere stetig auf U ist, und somit auf der kompakten Menge $\overline{B_h(z)}$ gleichmäßig stetig ist. ■

2.5. Anwendungen.

- (1) **Komplexer Logarithmus:** Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ besitzt auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{Z} : \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ (entlang der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene) eine Stammfunktion (Hauptzweig der komplexen Logarithmusfunktion)

$$\operatorname{Log} z := \int_{\gamma: 1 \rightarrow z} \frac{dz}{z}.$$

Es gilt $\operatorname{Log} 1 = 0$ und

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \arg z,$$

wobei mit \arg der Hauptzweig der Argumentfunktion bezeichnet wird, welcher wie folgt definiert ist: Sei $z = re^{i\varphi}$ die Polardarstellung der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}_-$ mit $r = |z| > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Dann ist

$$\arg : \mathbb{C}_- \rightarrow (-\pi, \pi), \quad z \mapsto \arg z := \varphi.$$

Mehr zur komplexen Logarithmusfunktion und ihre Beziehung zur Exponentialfunktion und allgemeinen komplexen Potenzfunktion wird in der Übung behandelt.

- (2) **Fresnel Integral:** Als weitere Anwendung des Integralsatzes von Cauchy wollen wir den Wert der sogenannten Fresnel-Integrale

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin(t^2) dt$$

bestimmen.³

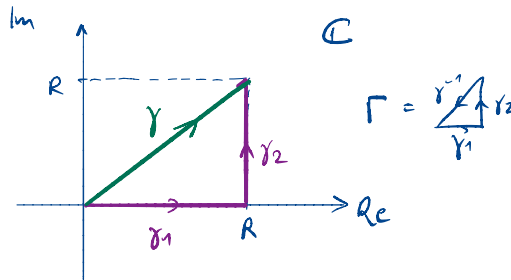
Dazu betrachten wir den Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-it^2} dt.$$

Die Funktion $f(z) = e^{-z^2}$ ist holomorph auf ganz \mathbb{C} , somit gilt nach dem Integralsatz von Cauchy, dass $\oint_\Gamma f(z) dz = 0$ für alle (stückweise) stetig differenzierbaren, einfach

³Diese Integrale sind natürlich als uneigentliche (Riemann-)Integrale zu verstehen. Man überzeugt sich leicht, dass die Funktionen $t \mapsto \cos(t^2)$ und $t \mapsto \sin(t^2)$ auf $[0, \infty)$ nicht Lebesgue integrierbar sind.

geschlossenen Kurven Γ in \mathbb{C} (da \mathbb{C} einfach zusammenhängend ist, ist jede einfach geschlossene Kurve null-homotop). Insbesondere gilt für die Kurve Γ



die Identität

$$0 = \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Wir berechnen für jedes Kurvenstück das komplexe Wegintegral von f :

(i) Für das Diagonalstück $\gamma : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (1+i)t$, erhalten wir

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^R e^{-(1+i)^2 t^2} (1+i) dt = (1+i) \int_0^R e^{-2it^2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}R} e^{-it^2} dt,$$

also gerade ein Vielfaches des gesuchten Integrals.

(ii) Für das Wegstück $\gamma_1 : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = t$ entlang der reellen Achse ist

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^R e^{-t^2} dt,$$

was für $t \rightarrow \infty$ gegen $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ konvergiert.

(iii) Für das Wegstück parallel zur imaginären Achse $\gamma_2 : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = R + it$, gilt

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^R e^{-(R+it)^2} i dt = i \int_0^R e^{-R^2+t^2} e^{-2iRt} dt.$$

Wegen $|e^{ix}| = 1$ für $x \in \mathbb{R}$, und da $t \leq R$ im Integrationsbereich, kann dieses Integral abgeschätzt werden durch

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \int_0^R e^{t^2-R^2} dt \leq e^{-R^2} \int_0^R e^{tR} dt = e^{-R^2} \frac{1}{R} [e^{R^2} - 1]$$

und somit $\int_{\gamma_2} f(z) dz \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$.

Zusammengefasst haben wir also gezeigt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-it^2} dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-it^2} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{1+i} \int_{\gamma} f(z) dz \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1+i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2(1+i)}. \end{aligned}$$

Die Werte der Fresnel-Integrale erhält man nun über

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos(t^2) dt &= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-it^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \\ \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt &= -\operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-it^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \end{aligned}$$

2.6. Weitere Folgerungen aus dem Integralsatz von Cauchy.

THEOREM 10.11 (CAUCHY-INTEGRALFORMEL FÜR KREISSCHEIBEN). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $\overline{B_r(a)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\} \subset U$. Dann gilt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad (10.2)$$

BEMERKUNG. Falls nicht anders angegeben, wird in komplexen Kurvenintegralen mit $\{|z - a| = r\} = \partial \overline{B_r(a)}$ stets die gegen den Uhrzeigersinn orientierte Kreislinie mit Radius r um a bezeichnet, die einmal durchlaufen wird. Diese kann z.B. durch $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow U$, $t \mapsto a + re^{it}$, parametrisiert werden.

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, noch ein kurzes Lemma, das in vielen Situationen hilfreich sein wird:

LEMMA. Sei $z_0 \in B_1(0)$ und sei $\rho < 1 - |z_0|$. Dann gilt für jede Funktion g , die holomorph in einer Umgebung von $\overline{B_1(0)} \setminus \{z_0\}$ ist, dass

$$\int_{|z|=1} g(z) dz = \int_{|z-z_0|=\rho} g(z) dz.$$

BEWEIS. Sei $z_0 = |z_0|e^{i\varphi} \in B_1(0)$, mit $\varphi = \arg z_0 \in (-\pi, \pi]$. Wir bezeichnen mit γ_ϵ die Kurve, die den Rand der Menge

$$B_1(0) \setminus \left(\overline{B_\rho(z_0)} \cup \{re^{i(\theta+\varphi)} : |\theta| < \epsilon, r > 0\} \right)$$

einmal durchläuft, und zwar so, dass das Wegstück entlang $\partial B_1(0)$ mathematisch positiv (also gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen wird. Abhängig von $\epsilon > 0$ und der Beziehung zwischen ρ und $|z_0|$ hat die Kurve γ_ϵ zwei oder vier gerade Streckenabschnitte und enthält keinen oder zwei Kreisbögen von $\partial B_\rho(z_0)$. Für $\delta > 0$ ist g holomorph in $K_{0,1+\delta} \cap S_{\varphi+\frac{\epsilon}{2}, 2\pi-\varphi-\frac{\epsilon}{2}}$,⁴ ein einfach



zusammenhängendes Gebiet, welches die Kurve γ_ϵ enthält. Insbesondere ist γ_ϵ null-homotop und aus dem Integralsatz von Cauchy (Theorem 10.9) folgt, dass

$$\int_{\gamma_\epsilon} g(z) dz = 0 \quad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ heben sich die Beiträge der geraden Streckenabschnitte weg und es folgt unter Berücksichtigung der Orientierung, dass

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} g(z) dz = \int_{|z|=1} g(z) dz - \int_{|z-z_0|=\rho} g(z) dz.$$

■

⁴Wir bezeichnen mit $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, $0 \leq r < R \leq \infty$, den Kreisring mit Innenradius r und Außenradius R um z_0 und mit $S_{\alpha,\beta}(z_0) = \{z_0 + re^{i\theta} : r > 0, \alpha < \theta < \beta\}$, $\alpha < \beta$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, einen Sektor mit Öffnungswinkel $\beta - \alpha$ zum z_0 in \mathbb{C} .

BEWEIS VON THEOREM 10.11. Für $0 < \epsilon < r$ sei γ_ϵ wie in der Bemerkung. Mit Korollar 10.10 (i) erhalten wir

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(a)}{z-a} dz.$$

Im Beispiel aus 2.1 haben wir gezeigt (vgl. auch Übungsaufgabe 9.2), dass

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(a)}{z-a} dz = f(a) \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i f(a).$$

Weiter folgt aus der Holomorphie von f , dass

$$\sup_{z \in \overline{B_r(a)}} \left| \frac{f(z) - f(a)}{z-a} \right| = M_r < \infty.$$

Insbesondere liefert dann die Standardabschätzung von Lemma 10.5, dass

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \leq M_r \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}_\epsilon(t)| dt = 2\pi \epsilon M_r \rightarrow 0$$

für $\epsilon \rightarrow 0$, und damit

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a).$$

■

KOROLLAR 10.12 (MITTELWERTEIGENSCHAFT HOLOMORPHER FUNKTIONEN). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $\overline{B_r(a)} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\} \subset U$. Dann gilt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

BEWEIS. Übung. ■

Bevor wir den nächsten zentralen Satz der komplexen Analysis formulieren, eine kleine Erinnerung an *analytische Funktionen*:

DEFINITION 10.13. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet. f heißt *analytisch* in $z_0 \in U$ genau dann, wenn es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ mit Konvergenzradius $\rho = \left(\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1} > 0$ gibt und ein $\delta \in (0, \rho)$ so, dass $B_\delta(z_0) \subset U$ und für alle $z \in B_\delta(z_0)$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

f heißt *analytisch auf U* , wenn f in jedem Punkt $z_0 \in U$ analytisch ist.

THEOREM 10.14 (POTENZREIHENENTWICKLUNGSSATZ). Ist f holomorph auf $B_r(z_0)$ für ein $r > 0$, so ist f analytisch in z_0 . Genauer besitzt f die auf $B_\rho(z_0)$ konvergente Darstellung als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in B_\rho(z_0),$$

mit

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

für alle $0 < \rho < r$.

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$. Aus der Cauchy-Integralformel (10.2) folgt für jedes $0 < \rho < r$, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in B_r.$$

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt nach der geometrischen Summenformel

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^N \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n + \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{N+1} \frac{1}{\zeta - z},$$

so dass, eingesetzt in die Cauchy-Integralformel,

$$f(z) = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n + R_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n z^n + R_N(z),$$

mit Fehlerterm

$$R_N(z) = z^{N+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \zeta^{-N-1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Diesen können wir mit Lemma 10.5 abschätzen durch

$$|R_N(z)| \leq \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{N+1} \rho \sup_{|\zeta|=\rho} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| \leq \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{N+1} \left(1 - \frac{|z|}{\rho}\right)^{-1} \sup_{|\zeta|=\rho} |f(\zeta)|,$$

wobei wir im letzten Schritt die umgekehrte Dreiecksungleichung $|\zeta - z| \geq ||z| - |\zeta||$ verwendet haben. Es folgt, dass

$$|R_N(z)| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$

gleichmäßig auf $B_{\rho-\epsilon}$ für jedes $\epsilon > 0$. ■

BEMERKUNG. Zusammen mit Übungsaufgabe 9.4 haben wir damit den *Fundamentalsatz der Komplexen Analysis* gezeigt:

THEOREM 10.15 (FUNDAMENTALSATZ DER KOMPLEXEN ANALYSIS). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet. Dann ist f analytisch auf U genau dann wenn f holomorph auf U ist, und der Konvergenzradius der Reihendarstellung in $z_0 \in U$ ist mindestens $\text{dist}(z_0, \partial U) = \inf_{z \in \partial U} |z - z_0|$, der Abstand des Entwicklungspunktes z_0 zum Rand ∂U der Menge U .

Insbesondere ist jede holomorphe Funktion beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt

$$f^{(n)}(z_0) = n! c_n = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Für die Koeffizienten c_n in der Reihenentwicklung einer holomorphen Funktion gilt die folgende Abschätzung (Cauchy-Abschätzung), die sofort aus Lemma 10.5 folgt:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho^{n+1}} \sup_{|z-z_0|=\rho} |f(z)| 2\pi \rho = \frac{1}{\rho^n} \sup_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|.$$

Daraus folgt direkt der *Satz von Liouville*:

THEOREM 10.16 (SATZ VON LIOUVILLE). Jede beschränkte ganze Funktion, d.h. $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, ist konstant.

BEWEIS. Nach Theorem 10.14 besitzt f die auf ganz \mathbb{C} konvergente Reihendarstellung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, und es gilt

$$|c_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \sup_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|$$

für jedes $\rho > 0$. Da f beschränkt ist, folgt

$$|c_n| \leq \frac{1}{\rho^n} \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty$$

für $n \geq 1$. Damit muss $f(z) = c_0$ gelten, d.h. f konstant. ■

Mit dem Satz von Liouville ausgestattet, kann man einen sehr einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra geben.

THEOREM 10.17 (FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA). *Jedes Polynom $f(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ vom Grad $n \geq 1$ ($c_n \neq 0$) besitzt eine Nullstelle, d.h. es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = 0$.*

BEWEIS. Angenommen es gäbe keine Nullstelle. Dann wäre $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ holomorph auf ganz \mathbb{C} als Verknüpfung der holomorphen Funktion f und der auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphen Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$. Außerdem gilt:

$$\exists R \geq 0 : |z| \geq R \Rightarrow |f(z)| \geq |f(0)| > 0,$$

so dass

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{1}{|f(z)|} = \sup_{|z| \leq R} \frac{1}{|f(z)|} = \max_{|z| \leq R} \frac{1}{|f(z)|} < \infty,$$

da f keine Nullstelle hat. Nach dem Satz von Liouville wäre dann $\frac{1}{f}$ konstant, im Widerspruch zu $c_n \neq 0$. ■

Klammert man iterativ $z - z_j$ mit z_j Nullstelle aus, so erhält man durch wiederholte Anwendung von Satz 10.17:

KOROLLAR 10.18 (FAKTORZERLEGUNG). *Sei $f(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ mit $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $c_n = 1$. Dann gibt es $z_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$ mit*

$$f(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_j).$$

3. Identitätssatz und analytische Fortsetzung

DEFINITION 10.19. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $n \in \mathbb{N}$. f hat eine n -fache Nullstelle bei $z_0 \in U$, wenn $f^{(k)}(z_0) = 0$ für $k = 1, \dots, n-1$, und $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Somit ist also

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

falls f in z_0 eine n -fache Nullstelle besitzt.

3.1. Nullstellen analytischer Funktionen und der Identitätssatz. Wir werden im Folgenden sehen, dass Nullstellen analytischer Funktionen, die nicht identisch verschwinden, isoliert auftreten müssen.

LEMMA 10.20. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann sind die Nullstellen von f isoliert, d.h. ist $f(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in U$, dann gibt es entweder ein $\delta > 0$ so, dass f auf $\{z \in U : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ nicht verschwindet, oder es gibt ein $\delta > 0$ so, dass $f(z) = 0$ für alle $z \in B_\delta(z_0)$.*

BEWEIS. Da f analytisch in U ist, existiert ein $\delta_0 > 0$ so, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in B_{\delta_0}(z_0)$. Da z_0 eine Nullstelle von f ist, gilt $a_0 = 0$.

Ist $a_n \neq 0$ für ein $n \geq 1$, so können wir

$$m = \min\{n \geq 0 : a_n \neq 0\}$$

betrachten. Setzt man nun

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n,$$

dann gilt $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z). \quad (10.3)$$

Die Funktion g ist analytisch in $B_{\delta_0}(z_0)$, insbesondere stetig. Daher existiert ein $\delta < \delta_0$ so, dass g auf $B_{\delta}(z_0)$ nicht verschwindet. Aus der Darstellung (10.3) sieht man, dass damit f auf $B_{\delta}(z_0) \setminus \{z_0\}$ nicht verschwindet.

Sind alle $a_n = 0$, so ist $f \equiv 0$ auf $B_{\delta_0}(z_0)$. ■

LEMMA 10.21. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Falls es für ein $z_0 \in U$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass $f \equiv 0$ in $B_{\delta}(z_0)$, dann gilt $f \equiv 0$ auf ganz U .

BEWEIS. Sei $A = \{z \in U : f^{(n)}(z) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$. Da jede der Funktionen $f^{(n)}$ stetig sind, sind die Mengen $A_n = \{z \in U : f^{(n)}(z) = 0\}$ abgeschlossen, und damit ist auch die Menge $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$ abgeschlossen.

A ist aber auch offen: Ist $z_1 \in A$, so ist die Taylorreihe von f in z_1 identisch 0 und damit $f(z) = 0$ für alle z in einer Umgebung von z_1 .

Damit ist $U = A \cup U \setminus A$ die Vereinigung zweier disjunkter, offener Mengen. Da U zusammenhängend ist, ist dies nur möglich, wenn $A = \{\emptyset, U\}$, und da $z_0 \in A$ muss $A = U$ gelten. ■

Beide Hilfssätze zusammen lassen sich verwenden, um den Identitätssatz für analytische Funktionen zu zeigen.

THEOREM 10.22 (IDENTITÄTSSATZ). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Falls $\{z \in U : f(z) = 0\}$ einen Häufungspunkt besitzt⁵, dann ist $f \equiv 0$ in U .

BEWEIS. Da die Nullstellenmenge von f einen Häufungspunkt $z_{\infty} \in U$ besitzt, muss es nach Lemma 10.20 ein $\delta > 0$ geben so, dass $f(z) = 0$ für alle $z \in B_{\delta}(z_{\infty})$. Damit folgt aber aus Lemma 10.21, dass f schon auf ganz U verschwinden muss. ■

KOROLLAR 10.23. Sind $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ und ist $V \subseteq U$ derart, dass

$$f(z) = g(z) \quad \text{für alle } z \in V,$$

so gilt $f = g$ falls V einen Häufungspunkt besitzt.

BEWEIS. Betrachte die auf U analytische Funktion $f - g$, deren Nullstellenmenge nach Voraussetzung einen Häufungspunkt besitzt. Damit gilt nach dem Identitätssatz 10.22, dass $f - g \equiv 0$ auf U . ■

BEISPIEL. Die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind holomorph und es gilt $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ für alle $z \in \mathbb{R}$. Da jeder Punkt in \mathbb{R} ein Häufungspunkt ist, gilt die Identität nach Korollar 10.23 für alle $z \in \mathbb{C}$.

⁵d.h. $f(z_n) = 0$ für eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ mit $z_n \rightarrow z_{\infty} \in U$.

3.2. Das Prinzip der analytischen Fortsetzung.

DEFINITION 10.24. Ist $V \subsetneq U \subseteq \mathbb{C}$ und sind $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ und $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann heißt \tilde{f} *analytische Fortsetzung* von f auf U wenn

$$f(z) = \tilde{f}(z) \quad \text{für alle } z \in V.$$

BEMERKUNG. Besitzt die Menge V in Definition 10.24 einen Häufungspunkt, so ist die analytische Fortsetzung nach dem Identitätssatz (bzw. Korollar 10.23) eindeutig.

BEISPIEL. (1) $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist holomorph auf $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Die Funktion $\tilde{f}(z) = \frac{1}{1-z}$ ist analytische Fortsetzung von f auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

(2) *Analytische Fortsetzung entlang Kreisketten*: $j \in \mathbb{N}$ seien $f_j(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(j)(z - z_j)^n$ Potenzreihen um $z_j \in \mathbb{C}$ mit Konvergenzradii $R_j \in (0, \infty]$. Falls sich die Kreisscheiben $\{B_{R_j}(z_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ überlappen und die Funktionen f_j dort *verträglich* sind, d.h.

$$f_j(z) = f_k(z) \quad \text{für alle } z \in B_{R_j}(z_j) \cap B_{R_k}(z_k)$$

wird mittels Identitätssatz genau eine holomorphe Funktion auf $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{R_j}(z_j)$ definiert.

DEFINITION 10.25 (ANALYTISCHE FORTSETZUNG ENTLANG KURVEN). Sei $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Kurve und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergente Potenzreihe um $z_0 = \gamma(t_0)$. Dann heißt die Familie

$$f_t(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)(z - \gamma(t))^n, \quad t \in [t_0, t_1],$$

von konvergenten Potenzreihen eine *analytische Fortsetzung von f entlang γ* , wenn gilt

- (i) $f_{t_0} = f$,
- (ii) für alle $t \in [t_0, t_1]$ existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass für alle $|\tau| < \epsilon$ die Funktionen f_t und $f_{\min\{t+\tau, t_1\}}$ verträglich sind.

BEMERKUNGEN. (1) Gibt es eine analytische Fortsetzung von f entlang γ , so ist diese nach dem Identitätssatz 10.23 eindeutig.

(2) Es wird keine Verträglichkeit bei späterer Wiederkehr verlangt.

BEISPIEL (KOMPLEXER LOGARITMUS). Die Familie

$$L_t(z) := it + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (e^{-it}z - 1)^n, \quad t \in [0, \infty),$$

ist eine analytische Fortsetzung des (Hauptzweig des) komplexen Logarithmus $L_0(z) = \text{Log } z$ auf \mathbb{C}_- entlang der Einheitskreislinie.

Aber: es handelt sich um eine mehrdeutige Funktion, so ist etwa für $n \in \mathbb{N}$

$$L_{2\pi n}(z) = 2\pi in + \text{Log}(z).$$

(Fortsetzung auf *Riemannsche Blätter*).

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem nützlichen Lemma.

LEMMA. Sei B_0, \dots, B_n eine Kreiskette und f_0 eine holomorphe Funktion auf B_0 . Lässt sich die Ableitung f_0' längs der Kreiskette analytisch fortsetzen, so auch f_0 selbst.

BEWEIS. Übung. ■

4. Laurentreihen

In diesem Abschnitt wollen wir das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe einer isolierten Singularität untersuchen und beschreiben.

DEFINITION 10.26 (KLASSIFIKATION ISOLIERTER SINGULARITÄTEN). Für eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, heißt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ *isolierte Singularität*, falls ein $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$.

Eine isolierte Singularität z_0 heißt

- (i) *hebbbar*, wenn sich f analytisch auf $U \cup \{z_0\}$ fortsetzen lässt.
- (ii) *Pol*, falls es ein $m \geq 1$ gibt derart, dass $(z - z_0)^m f(z)$ eine hebbare Singularität bei z_0 besitzt. Das kleinste derartige m heißt *Ordnung* des Pols.
- (iii) *wesentliche Singularität*, falls sie weder hebbbar noch Pol ist.

BEISPIELE. (1) Die Funktion $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ hat als auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion eine hebbare isolierte Singularität bei $z_0 = 0$. Eine (die) Analytische Fortsetzung von f auf \mathbb{C} ist gegeben durch

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

(2) Für $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z_0) \neq 0$ für $z_0 \in U$ besitzt

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

bei z_0 einen Pol m -ter Ordnung.

(3) Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ hat eine wesentliche Singularität bei $z_0 = 0$.

Der nächste Satz zeigt, dass eine isolierte Singularität hebbbar ist, genau dann wenn sie "gutartig" im Sinne von beschränkt ist.

THEOREM 10.27 (RIEMANNSCHE HEBBARKEITSSATZ). Eine isolierte Singularität $z_0 \in U$ von $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist genau dann hebbbar, wenn f in einer punktierten Umgebung von z_0 beschränkt ist, d.h. falls es ein $C \geq 0$ und $\epsilon > 0$ gibt so, dass

$$|f(z)| \leq C \quad \text{für alle } 0 < |z - z_0| < \epsilon.$$

BEWEIS. Besitzt f eine analytische Fortsetzung auf $U \cup \{z_0\}$, so ist diese insbesondere stetig in z_0 und damit in einer Umgebung von z_0 beschränkt.

Umgekehrt gebe es $C \geq 0$ und $\epsilon > 0$ derart, dass

$$|f(z)| \leq C \quad \text{für alle } 0 < |z - z_0| < \epsilon.$$

Definiere die Funktion

$$g : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|g(z) - g(z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0| |f(z)| = 0,$$

insbesondere ist also g holomorph in z_0 mit $g(z_0) = g'(z_0) = 0$, und somit nach Satz 10.14

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

für $c_n \in \mathbb{C}$. Damit ist die Funktion

$$\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z - z_0)^n$$

eine analytische Fortsetzung von f auf $U \cup \{z_0\}$, die nach den Identitätssatz Korollar 10.23 eindeutig ist. ■

DEFINITION 10.28 (LAURENTREIHE). Für Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, und $z, z_0 \in \mathbb{C}$ heißen die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad \text{Hauptteil} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{Nebenteil}$$

der *Laurentreihe*

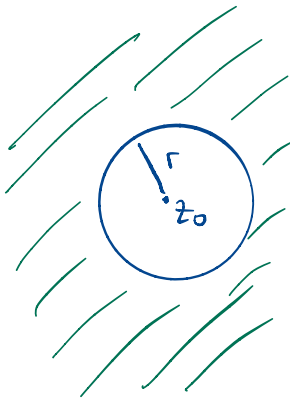
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Diese heißt (absolut, gleichmäßig, etc.) *konvergent*, wenn dies für Haupt- und Nebenteil zutrifft.

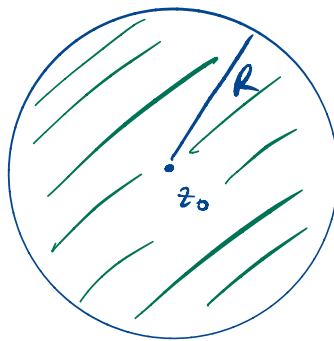
BEMERKUNG. Ist $\frac{1}{r} \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$ und $R \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, dann konvergiert die Laurentreihe auf dem Kreisring

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

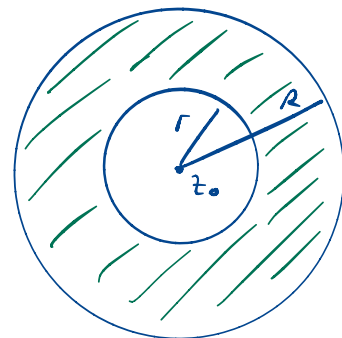
und ist dort holomorph.



Konvergenzgebiet
des Hauptteils



Konvergenzgebiet
des Nebenteils



Konvergenzgebiet
der Laurentreihe

LEMMA 10.29. Konvergiert $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n =: f(z)$ auf $K_{r,R}(z_0)$, dann gilt für $\rho \in (r, R)$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

BEWEIS. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auf $K_{r,R}(z_0)$ gilt

$$\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{k-n-1} dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (2\pi i \delta_{kn}) = 2\pi i c_n,$$

wobei wir Beispiel 2.1 verwendet haben (dort für $z_0 = 0$, man überlegt sich leicht, dass dies auch für allgemeines $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt). ■

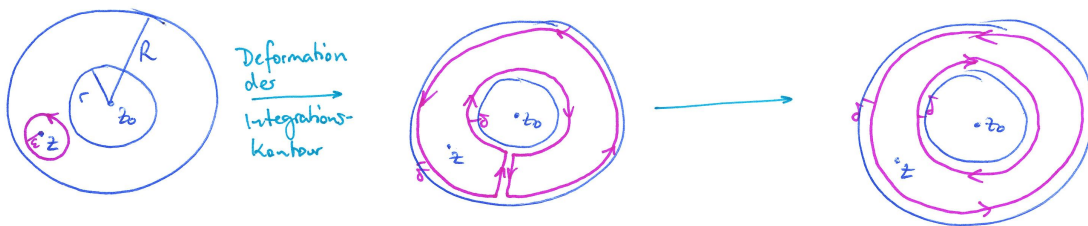
THEOREM 10.30 (LAURENTREIHENENTWICKLUNGSSATZ). Sei $f : K_{r,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$. Ähnlich zum Beweis der Cauchy-Integralformel für Kreisscheiben (Satz 10.11, siehe auch das Lemma danach) können wir eine Cauchy-Integralformel für Kreisinge zeigen. Dazu deformiert man das Integrationsgebiet wie folgt:



Damit gilt für $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R-\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r+\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R-\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \int_{|\zeta|=R-\delta} f(\zeta) \frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} d\zeta \end{aligned} \quad (10.4)$$

Verwenden wir nun die geometrische Reihe, um

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n, \quad \text{für } |z| < R, \\ \frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n, \quad \text{für } |z| > r, \end{aligned}$$

zu schreiben, so liefert gliedweise Integration in (10.4) die Behauptung. ■

Beispiele

(1) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Mittels Partialbruchzerlegung können wir f schreiben als $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$, sodass mit der geometrischen Reihe folgt:

- auf $K_{0,1}(0)$: $f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$,
- auf $K_{0,1}(1)$: $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n$.

Dabei sieht man ein typisches Verhalten von Laurentreihen:

- der äußere Konvergenzradius der Laurentreihe ist durch die nächstgelegene Singularität begrenzt,
- der Hauptteil der Laurentreihe bricht nach m Termen ab, wobei m die Ordnung der Singularität ist, um die entwickelt wird.

(2) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ auf $K_{0,\infty}(0)$. Auch bei diesem Beispiel zeigt sich ein typisches Verhalten von Laurentreihen: der Hauptteil der Laurentreihe bricht nicht ab bei wesentlichen Singularitäten.

THEOREM 10.31 (CASORATI-WEIERSTRASS). Sei $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität in $z_0 \in U$. Dann ist für jedes $\epsilon > 0$ das Bild

$$f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$$

der punktierten Kreisscheibe um z_0 dicht in \mathbb{C} , d.h. für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset U \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \rightarrow z_0$ so, dass $f(z_n) \rightarrow \alpha$.

BEWEIS. Wir beweisen durch Widerspruch: angenommen es gibt ein $\delta > 0$ und $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $B_\delta(w_0) \cap f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) = \emptyset$, das heißt $f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ nicht dicht in \mathbb{C} . Dann ist die Funktion

$$h : B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto h(z) := \frac{1}{f(z) - w_0}$$

auf $B_\epsilon(z_0)$ beschränkt und kann nach dem Riemannsches Hebbarkeitssatz (Theorem 10.27 zu einer holomorphen Funktion auf $B_\epsilon(z_0)$ fortgesetzt werden. Ferner gilt $h(z_0) = 0$, also ist z_0 isolierte Nullstelle von h . Da isolierte Nullstellen von nicht-verschwindenden holomorphen Funktionen höchstens endlicher Ordnung sind (vgl. Abschnitt 3.1), hat die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} + w_0$$

bei $z = z_0$ einen Pol endlicher Ordnung, im Widerspruch zur Annahme, dass f dort eine wesentliche Singularität besitzt. ■

Zusammenfassend haben wir die folgenden Charakterisierungen isolierter Singularitäten gelernt:

- (1) f besitzt eine hebbare Singularität bei $z_0 \Leftrightarrow f$ ist beschränkt in einer Umgebung von $z_0 \Leftrightarrow \lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} f(z)$ existiert und ist endlich.
- (2) f besitzt eine Polstelle (m -ter Ordnung, $m \geq 1$) bei $z_0 \Leftrightarrow \lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} |f(z)| = \infty$ (und $\lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} (z - z_0)^m f(z)$ existiert und ist endlich, m kleinstmöglich)
- (3) f besitzt eine wesentliche Singularität bei $z_0 \Leftrightarrow$ Menge der Häufungspunkte von $f(z)$ für $z \rightarrow z_0$ ist ganz $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Wir sehen, dass Funktionen mit wesentlichen Singularitäten in einem gewissen Sinn recht weit davon entfernt sind, analytisch zu sein. Hat eine Funktion g jedoch einen Pol bei z_0 , so besitzt $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ eine hebbare Singularität bei z_0 . Polstellen kann man sich daher auch vorstellen als Punkte, an denen g "analytisch" ist, aber den Wert ∞ hat. Dies führt auf die Definition meromorpher Funktionen.

DEFINITION 10.32. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet. Für $g, h : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit h nicht identisch null definiert

$$f : U \setminus \{z \in U : h(z) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

eine meromorphe Funktion f auf U .

Meromorphe Funktionen sind holomorph auf $U \setminus \{z \in U : h(z) = 0\}$. Ist $z_0 \in U$ Nullstelle der Vielfachheit $m \in \mathbb{N}$ von h und $k \in \mathbb{N}_0$ von g , dann ist die isolierte Singularität z_0 von f für $k \geq m$ hebbar und für $k < m$ ein Pol der Ordnung $m - k$. (siehe Aufgabe 11.2)

5. Residuenkalkül

5.1. Residuen.

DEFINITION 10.33. Sei $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f : K_{0,r}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt für $\rho \in (0, r)$

$$\text{Res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz$$

das Residuum von f bei z_0 .

LEMMA 10.34. Ist f wie in Definition 10.33 und ist $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ die Laurentreihenentwicklung von f , dann gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = c_{-1}.$$

BEWEIS. Es gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^n dz = c_{-1},$$

wobei wir verwendet haben, dass die Laurentreihe auf $K_{0,r}(z_0)$ gleichmäßig konvergiert und daher Integration und Summation vertauscht werden können, sowie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^n dz = \delta_{n,-1}.$$

■

Beispiele

(1) Hat f bei z_0 einen Pol k -ter Ordnung, so lautet die Laurentreihe um z_0

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

und somit

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + \cdots + a_{-1} (z - z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k}.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_0}(f) &= a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \Big|_{z=z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z). \end{aligned}$$

(2) Ist $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ meromorph mit einer einfachen Nullstelle von h bei z_0 und $g(z_0) \neq 0$, dann gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{h(z)} g(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

(3) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ist meromorph mit einfachen Polen bei $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Mit vorigem Beispiel gilt dann

$$\operatorname{Res}_{z_n}(f) = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{z - n\pi}{\sin z} = (-1)^n.$$

5.2. Der Residuensatz.

THEOREM 10.35 (RESIDUENSATZ). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $S := \{z_1, \dots, z_m\} \subset U$ eine Menge paarweise disjunkter Punkte in U .



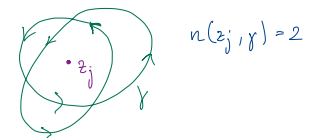
Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow U \setminus S$ eine geschlossene, stückweise differenzierbare Kurve ohne Überschneidungen, die in U null-homotop ist und S mit positiver Orientierung umschließt. Dann gilt für $f : U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dass

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}_{z_j}(f).$$

Bemerkung: Mit Hilfe der Windungszahl

$$n(z_j, \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_j} \in \mathbb{Z}$$

lässt sich der Residuensatz auf geschlossene Kurven mit Überschneidungen verallgemeinern.



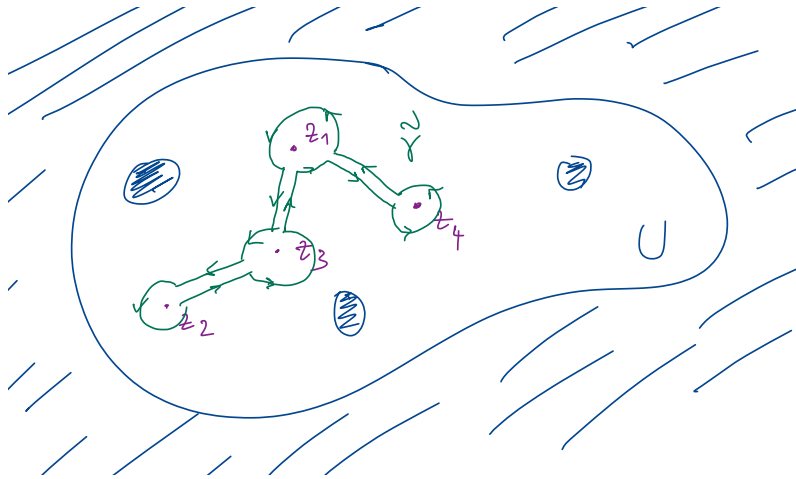
Es gilt dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m n(z_j, \gamma) \text{Res}_{z_j}(f).$$

BEWEISIDEE VON THEOREM 10.35. Schreibe

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

unter Verwendung der Homotopie, wobei $\tilde{\gamma}$ wie folgt gegeben ist:



Die Verbindungswege \leftrightarrow heben sich im Grenzwert weg und es bleiben komplexe Wegintegrale entlang Kreislinien um die Punkte z_j mit

$$\int_{|z-z_j|=\rho_j} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_j}(f).$$

■

5.3. Anwendung des Residuensatzes auf die Berechnung von Integralen.

1. Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.
Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4} =: \lim_{R \rightarrow \infty} I_R.$$

Die Pole des Integranden in \mathbb{C} sind die Nullstellen des Nenners

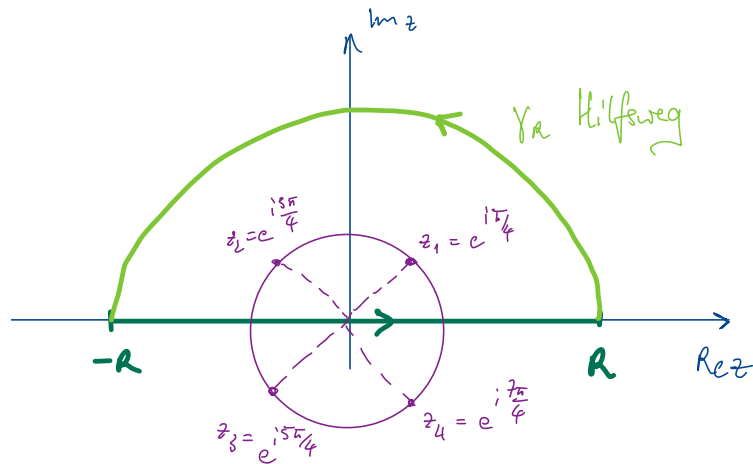
$$1+z^4=0 \quad \Leftrightarrow \quad z^4=-1=e^{i\pi},$$

das heißt

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Es liegen also Pole erster Ordnung bei z_1, \dots, z_4 vor.

Wählen wir uns einen Hilfsweg γ_R , $R > 1$, in der komplexen Ebene,



so folgt aus dem Residuensatz, dass

$$I_R + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \operatorname{Res}_{z_j} \left(\frac{1}{1+z^4} \right),$$

denn die beiden Polstellen z_1 und z_2 liegen innerhalb der Integrationskontour. Nun gilt

(i) für die relevanten Residuen

$$\operatorname{Res}_{z_1} \left(\frac{1}{1+z^4} \right) = \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_1 - z_3} \frac{1}{z_1 - z_4} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}},$$

$$\operatorname{Res}_{z_2} \left(\frac{1}{1+z^4} \right) = \frac{1}{z_2 - z_1} \frac{1}{z_2 - z_3} \frac{1}{z_2 - z_4} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

somit

$$2\pi i \sum_{j=1}^2 \operatorname{Res}_{z_j} \left(\frac{1}{1+z^4} \right) = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} i \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

(ii) für das Kuvenintegral entlang des Hilfswegs γ_R

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} = \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{1+R^4e^{4it}} dt =: H_R,$$

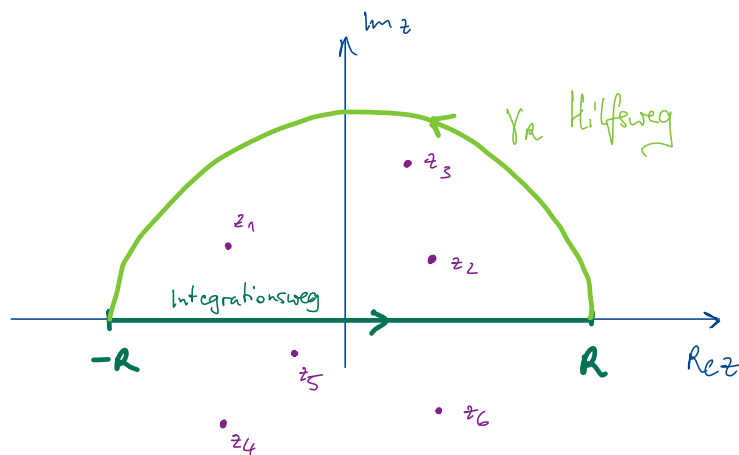
was wir abschätzen können durch

$$|H_R| \leq R \int_0^\pi \frac{1}{|1+R^4e^{4it}|} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Insgesamt haben wir damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2. *Fourierintegrale* der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx$, wobei P, Q Polynome mit $\operatorname{grad} Q > \operatorname{grad} P$ und Nullstellen z_1, \dots, z_n von Q , die nicht auf der reellen Achse liegen.



Der Hilfsweg $\gamma_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$ liefert keinen Beitrag im Limes $R \rightarrow \infty$, denn

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} e^{i(Re^{it})} Re^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R|P(Re^{it})|}{|Q(Re^{it})|} e^{-R \sin t} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass

- (i) $e^{iz} = e^{i\operatorname{Re}z} e^{-\operatorname{Im}z}$ und damit $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im}z}$,
- (ii) $\frac{R|P(Re^{it})|}{|Q(Re^{it})|}$ ist beschränkt für $R \rightarrow \infty$, da nach Voraussetzung $\operatorname{grad}Q > \operatorname{grad}P$,
- (iii) $e^{-R \sin t} \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$, da $t \in (0, \pi)$ (an dieser Stelle zeigt sich, warum wir den Hilfsweg über die obere Halbebene $\operatorname{Im}z > 0$ wählen müssen),
- (iv) (den Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz).

Aus dem Residuensatz folgt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}z_j > 0} \operatorname{Res}_{z_j} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} \right).$$

3. Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Die Funktion $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit einer hebbaren Singularität bei $z_0 = 0$. Um das Integral zu berechnen, betrachten wir zunächst für $r > 0$ die Integrale

$$\int_{-r}^{-\frac{1}{r}} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\frac{1}{r}}^r \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

Die beiden Wegstrecken können über zwei Halbkreise in der oberen Halbebene mit Radius r und $\frac{1}{r}$ zu einer geschlossenen Kurve ergänzt werden. Dann wird für jedes $r > 0$ die Singularität im Ursprung ausgespart und, da keine Singularitäten innerhalb der Integrationskurve liegen, gilt

$$\int_{[-r, -\frac{1}{r}]} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_{\frac{1}{r}}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{[\frac{1}{r}, r]} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0, \quad (10.5)$$

wobei mit $\gamma_\rho, \rho \in \{\frac{1}{r}, r\}$ der positiv orientierte Halbkreis in der oberen Halbebene mit Radius ρ bezeichnet wird, parametrisiert durch

$$\gamma_\rho : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \gamma_\rho(t) = \rho e^{it}.$$

Daher muss das Integral über den kleineren Halbkreis mit Radius $\frac{1}{r}$ auch abgezogen werden, denn dieses Stück wird im Uhrzeigersinn, also im mathematisch negativen Sinn, durchlaufen.

Das Integral über den größeren Halbkreis verschwindet für $r \rightarrow \infty$, denn

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{ir e^{it}}}{r e^{it}} i r e^{it} \right| dt = \int_0^\pi \left| e^{ir(\cos t + i \sin t)} \right| dt = \int_0^\pi e^{-r \sin t} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Dabei haben wir den Satz über majorisierte Konvergenz verwendet, denn der Integrand ist majorisiert durch die auf $[0, \pi]$ integrierbare Funktion 1, unabhängig von r , und geht punktweise auf $(0, \pi)$ gegen null für $r \rightarrow \infty$.

Der kleine Halbkreis liefert den eigentlichen Beitrag zum Integral. Wegen

$$\left| \int_{\gamma_{\frac{1}{r}}} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{i \frac{1}{r} e^{it}}}{\frac{1}{r} e^{it}} i \frac{1}{r} e^{it} \right| dt = \int_0^\pi e^{-\frac{1}{r} \sin t} dt \leq \int_0^\pi 1 dt = \pi$$

für alle $r > 0$, ist die konstante Funktion 1 eine integrierbare Majorante und es folgt mit dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz, dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{i \frac{1}{r} e^{it}}}{\frac{1}{r} e^{it}} i \frac{1}{r} e^{it} dt = i \int_0^\pi \lim_{r \rightarrow \infty} e^{i \frac{1}{r} e^{it}} dt = i \int_0^\pi 1 dt = i\pi.$$

Insgesamt erhalten wir also mit (10.5)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{-r}^{-\frac{1}{r}} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\frac{1}{r}}^r \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma_{\frac{1}{r}}} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = i\pi.$$

Wegen $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix} = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ folgt dann aber

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{-r}^{-\frac{1}{r}} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\frac{1}{r}}^r \frac{\sin x}{x} dx + \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} \frac{\sin x}{x} dx \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{-r}^{-\frac{1}{r}} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\frac{1}{r}}^r \frac{\sin x}{x} dx \right) + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \operatorname{Im}(i\pi), \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass die Funktion $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ in einer Umgebung von $x = 0$ beschränkt bleibt und daher der letzte Term für $r \rightarrow \infty$ verwindet.

6. Anwendung: Ebene Potentialprobleme

Mithilfe der gewonnenen Erkenntnisse über holomorphe Funktionen wollen wir nun eine Anwendung auf partielle Differentialgleichungen betrachten, spezieller Potentialprobleme in der Ebene \mathbb{R}^2 , die wir wieder identifizieren wollen mit \mathbb{C} .

Zunächst sei daran erinnert, dass Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen *harmonisch* sind.

6.1. Harmonische Funktionen.

DEFINITION 10.36 (HARMONISCHE FUNKTION). Eine Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$, $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $d \in \mathbb{N}$, heißt *harmonisch*, falls

$$\Delta \varphi = \sum_{j=1}^d \partial_j^2 \varphi = 0.$$

THEOREM 10.37. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$, holomorph, dann sind $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ auf U harmonisch.

BEWEIS. Da f holomorph ist auf U , ist f analytisch auf U , insbesondere unendlich oft komplex differenzierbar. Die Behauptung folgt dann aus den Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen, vgl. Übungsaufgabe 9.3. ■

6.2. Ebene Dirichlet-Probleme. Sei nun $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit glattem Rand ∂U . Eine typische Fragestellung aus der Elektrostatik ist das *Randwertproblem*

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(x, y) &= 0 \quad \text{für } (x, y) \in U, \\ \varphi(x, y) &= \varphi_0 \quad \text{für } (x, y) \in \partial U, \end{aligned}$$

für eine gesuchte Funktion $\varphi : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ und vorgegebenen Randwerten $\varphi_0 \in C(\partial U, \mathbb{R})$, φ_0 beschränkt. Ein derartiges Randwertproblem wird auch als *Dirichlet-Problem* (für die Laplace-Gleichung) bezeichnet.

Als wichtiges Beispiel betrachten wir den Fall $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ die obere Halbebene, identifiziert mit $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, und $\varphi_0 \in C(\mathbb{R})$, wobei wir annehmen wollen, dass die Funktion φ_0 im Unendlichen abfällt gemäß

$$|\varphi_0(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|} \quad \text{für ein } C > 0. \quad (10.6)$$

Dann gilt

THEOREM 10.38 (POISSON-INTEGRALFORMEL FÜR DIE OBERE HALBEBENE). Die Funktion

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad (10.7)$$

erfüllt das Dirichlet-Problem für die obere Halbebene

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x, y) &= 0 \quad \text{für } (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \\ \varphi(x, y) &= \varphi_0 \quad \text{für } (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \end{aligned}$$

mit Randwerten $\varphi_0 \in C(\mathbb{R})$, für die (10.6) gilt.

BEWEIS VON THEOREM 10.38, TEIL 1. Die Funktion $f(z) := \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_0(t)}{t-z} dt$ ist holomorph auf \mathbb{C}_+ mit

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t) \operatorname{Im} \left(\frac{1}{t-z} \right) dt = \varphi(x, y)$$

für $y > 0$, denn

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{t-z} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{t-\bar{z}}{|t-z|^2} \right) = \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}.$$

Somit gilt für $y > 0$

$$\Delta\varphi(x, y) = 0.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Randwerte angenommen werden. Dies werden wir nach einem kleinen Einschub zum Faltungsprodukt beweisen. ■

Wir können die Poisson-Integralformel (10.7) auch als *Faltung*

$$\varphi(x, y) = (\varphi_0 * P_y)(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(t) P_y(x-t) dt$$

mit dem *Poisson-Kern*

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

schreiben.

6.3. Faltung und gute Kerne. Allgemeiner definiert man

DEFINITION 10.39 (FALTUNGSPRODUKT). Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, heißt

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d$$

die *Faltung* von f und g .

THEOREM 10.40. Das Faltungsprodukt ist wohldefiniert als Abbildung

$$* : L^1(\mathbb{R}^d) \times L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d)$$

mit

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Der Raum $(L^1(\mathbb{R}^d), *)$ ist eine kommutative und assoziative Algebra, das heißt für alle $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt

- (i) $f * g = g * f$ (Kommutativität)
- (ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (Assoziativität)
- (iii) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ (Distributivität)
- (iv) für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$ (Assoziativität bzgl. skalarer Multiplikation).

BEWEIS. Wir zeigen nur die Wohldefiniertheit und Abschätzung, die Algebra-Eigenschaften sind eine leichte Übung (mit Fubini und Eigenschaften des Integrals).

SCHRITT 1: Seien $f, g \in L^1 \cap L^\infty$. Dann ist die Faltung $f * g$ wohldefiniert (punktweise fast überall) und es gilt

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)||g(x-y)| dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| dx \right) dy \\ &= \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $f * g \in L^1$.

SCHRITT 2: Für allgemeine $f, g \in L^1$ approximieren wir durch $f_n = \min\{f, n\} \in L^\infty \cap L^1$. Es gilt $f_n \rightarrow f$ in L^1 (majorisierte Konvergenz!) und mit Schritt 1 erhalten wir

$$\|f_n * g - f_m * g\|_{L^1} = \|(f_n - f_m) * g\|_{L^1} \leq \|f_n - f_m\|_{L^1} \|g\|_{L^1} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

da $\{f_n\}$ als konvergente Folge insbesondere eine Cauchy-Folge ist. Damit ist die Folge $f_n * g$ eine Cauchy-Folge in L^1 , sodass wir aufgrund der Vollständigkeit von L^1

$$f * g := L^1 - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n * g$$

definieren können.⁶ ■

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Algebra $(L^1(\mathbb{R}^d), *)$ kein neutrales Element besitzt, d.h. es existiert keine Funktion $\delta \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $f * \delta = f$ für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Wir werden später sehen, dass die Dirac Delta-Distribution ein solches Eins-Element für die Faltung auf $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist.

Der Beweis der Poisson-Integralformel für die obere Halbebene beruht im Wesentlichen darauf, dass der Poisson-Kern ein *guter Kern* bzw. eine *approximative Eins* ist in folgendem Sinn:

DEFINITION 10.41 (GUTER FALTUNGSKERN, APPROXIMATIVE IDENTITÄT). Eine Folge von Faltungskernen $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf \mathbb{R}^d heißt Familie von *guten Kernen* oder *Approximation der Eins*, falls gilt:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} k_n(x) dx = 1.$$

(ii) Es existiert ein $M > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |k_n(x)| dx \leq M.$$

(iii) Für jedes $\delta > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \delta} |k_n(x)| dx = 0.$$

Eine Folge guter Kerne mit $k_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nennt man auch *Dirac-Folge*.

Beispiele für gute Kerne Sei $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ Nullfolge. Dann sind

(a) Poisson-Kerne $P_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon_k}{x^2 + \epsilon_k^2}$ für $x \in \mathbb{R}$,

(b) Gauß-Kerne $\delta_k(x) = (2\pi\epsilon_k)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2\epsilon_k^2}}$ für $x \in \mathbb{R}^d$,

Beispiele für Dirac-Folgen.

⁶Zur Vollständigkeit von L^1 (Satz von RIESZ-FISCHER) siehe z.B. [3, Satz 8.1].

- (c) Sei allgemein $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\phi\|_{L^1} = 1$, und $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ Nullfolge. Dann definiert $\phi_{\epsilon_k}(x) := \epsilon_k^{-d} \phi(\frac{x}{\epsilon_k})$ eine Folge guter Kerne. (Übung!)

THEOREM 10.42 (GLÄTTUNG DURCH FALTUNG MIT GUTEN KERNEN). Sei $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie guter Kerne.

- (1) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|k_n * f - f\|_{L^1} = 0.$$

- (2) Ist ferner $k_n \in C^m(\mathbb{R}^d)$ und sind die partiellen Ableitungen $\partial^\alpha k_n$, $|\alpha| \leq m$, beschränkt, so gilt

$$f * k_n \in C^m(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad \partial^\alpha (f * k_n) = f * \partial^\alpha k_n.$$

- (3) Ist $f \in C(\mathbb{R}^d)$ beschränkt, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f * k_n(x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst⁷ nur (3): Da $\int_{\mathbb{R}^d} k_n(x) dx = 1$, gilt

$$f * k_n(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)k_n(y) dy - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x))k_n(y) dy.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f in x gibt es zu $\epsilon > 0$ beliebig ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f(x-y) - f(x)| < \epsilon \quad \text{für} \quad |y| < \delta.$$

Damit folgt aus der Eigenschaft (ii) guter Kerne, dass ein $M > 0$ existiert mit

$$\int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)||k_n(y)| dy \leq \epsilon \int_{|y| < \delta} |k_n(y)| dy \leq \epsilon M.$$

Weiter folgt aus Eigenschaft (iii) guter Kerne und der Beschränktheit von f , dass für n groß genug

$$\int_{|y| \geq \delta} |f(x-y) - f(x)||k_n(y)| dy \leq C \int_{|y| \geq \delta} |k_n(y)| dy \leq C\epsilon,$$

da $\int_{|y| \geq \delta} |k_n(y)| dy \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Insgesamt haben wir also

$$\begin{aligned} |f * k_n(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)||k_n(y)| dy \\ &= \int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)||k_n(y)| dy + \int_{|y| \geq \delta} |f(x-y) - f(x)||k_n(y)| dy \\ &\leq (M + C)\epsilon, \end{aligned}$$

und da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Jetzt ist der Rest des Beweises von Satz 10.38 einfach:

BEWEIS VON THEOREM 10.38, TEIL 2. Wir hatten gesehen, dass

$$\varphi(x, y) = (\varphi_0 * P_y)(x),$$

die Faltung vom Randwert φ_0 mit dem Poissonkern.

Sei nun $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $\epsilon_k > 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\epsilon_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Da ϕ_0 stetig und beschränkt ist, und die Familie $\{P_{\epsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Familie guter Kerne ist, folgt aus Theorem 10.42, dass

$$\lim_{y \downarrow 0} \varphi(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_0 * P_{\epsilon_k})(x) = \varphi_0(x).$$

⁷Aussage 1 werden wir im Zusammenhang des Fourierinversionssatzes benötigen und dort beweisen

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass φ gegeben durch 10.7 harmonisch ist in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ mit Randwerten $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$. ■

Ausblick: Ist $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $V \subseteq U$ Gebiet, dann ist $\psi(V)$ auch ein Gebiet und es gilt $\psi(\partial V) = \partial\psi(V)$ (*Gebietstreue holomorpher Funktionen*). Damit lässt sich die Lösung des Dirichletproblems auf V durch Transformation mittels $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}_+$ holomorph mit $\psi(V) = \mathbb{C}_+$ aus der Poisson-Integralformel für \mathbb{C}_+ gewinnen (vgl. Übungsaufgabe 13.2).

Weiterführende Literatur: [4], [6], [2].

Fouriertransformation und Grundzüge der Distributionentheorie

1. Definition der Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{R}^d)$

Zunächst definieren wir die Fouriertransformation auf dem Banachraum (ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Raum) $L^1(\mathbb{R}^d)$.

DEFINITION 11.1. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik \cdot x} f(x) dx$$

die Fouriertransformierte von f .

Bemerkungen:

1. Statt \hat{f} findet man auch oft die Notation $\mathcal{F}f$.
2. Bezüglich der Vorfaktoren gibt es verschiedene Konventionen; so findet man zum Beispiel auch

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik \cdot x} f(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik \cdot x} f(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i k \cdot x} f(x) dx$$

in der Literatur. Da sich dies auf manche Rechenregeln auswirkt, ist daher Vorsicht geboten!

3. Das Skalarprodukt im Exponenten ist das euklidische Skalarprodukt reeller Vektoren, $k \cdot x = \sum_{j=1}^d k_j x_j$.
4. Das Integral in Definition 11.1 existiert, da $|e^{-ik \cdot x}| = 1$ und damit $|f|$ eine integrierbare Majorante ist.

Beispiele:

1. Gauß-Funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$ mit Parametern $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\sigma > 0$.

Es gilt

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}},$$

wobei wir die Exponenten zusammenfassen können und nach quadratischer Ergänzung auch schreiben können als

$$e^{-ikx} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{(x-\alpha+ik\sigma)^2}{2\sigma^2}} e^{-i\alpha k} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}.$$

Das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\alpha+ik\sigma)^2}{2\sigma^2}} dx$$

kann als komplexes Wegintegral entlang der Geraden $\{\operatorname{Im} z = k\sigma^2 - \operatorname{Im} \alpha\}$ parallel zur reellen Achse aufgefasst werden. Wie in Übungsaufgabe 10.2 erhält man dann

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\alpha+ik\sigma)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi\sigma^2},$$

insgesamt also

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} e^{-i\alpha k}.$$

Insbesondere gilt für $\alpha = 0$ und $\sigma = 1$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2}}$$

2. Allgemeiner gilt für $d \in \mathbb{N}$ und

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

dass die Fouriertransformierte gegeben ist durch

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\sigma^2 |k|^2}{2}}, \quad k \in \mathbb{R}^d.$$

3. Für die Indikatorfunktion χ des Intervalls $[-a, a]$, $a > 0$, also

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gilt

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-ik} e^{-ikx} \right]_{-a}^a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{k} \frac{1}{2i} (e^{ika} - e^{-ika}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ka)}{k}. \end{aligned}$$

DEFINITION 11.2. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ heißt

$$\check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ik \cdot x} f(k) dk, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

inverse Fouriertransformierte von f . Man schreibt auch $\mathcal{F}^{-1}(f) = \check{f}(x)$.

Beispiel: Beispiel 1. zeigt für

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} e^{-i\alpha k} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2}{2} (k+i\frac{\alpha}{\sigma^2})^2} e^{\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma},$$

dass

$$\check{\check{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-i(-\frac{i\alpha}{\sigma^2})(-x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} = f(x).$$

Allgemeiner gilt

THEOREM 11.3 (FOURIERINVERSIONSSATZ). Sind f und \widehat{f} in $L^1(\mathbb{R}^d)$, so gilt

$$\check{\check{f}} = f.$$

BEWEIS. Der Beweis verwendet 10.42 (1) und die folgende Aussage, die wir später beweisen werden:

LEMMA. Falls $f_n \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ für $n \rightarrow \infty$, so existiert eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Angenommen dass beide Aussagen gelten, handelt es sich beim Beweis des Fourierumkehrsatzes um ein typisches Approximationsargument:

SCHRITT 1: Inversionsformel für $f * \delta_\ell$ mit

$$\delta_\ell(x) = \left(\frac{\ell^2}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\ell^2|x|^2}{2}}, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Es ist

$$\widehat{\delta}_\ell(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \delta_\ell(x) e^{-ik \cdot x} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|k|^2}{2\ell^2}},$$

und da wir die Fourierinversionsformel für Gaußfunktionen schon gezeigt haben, gilt

$$\begin{aligned} (f * \delta_\ell)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \delta_\ell(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \check{\delta}_\ell(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ik \cdot (x-y)} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}} \frac{dk}{(2\pi)^d} \right) dy. \end{aligned}$$

Verwenden wir jetzt den Satz von Fubini, um die Integrationsreihenfolge zu vertauschen, so folgt

$$\begin{aligned} (f * \delta_\ell)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik \cdot y} f(y) \frac{dy}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \right) e^{ik \cdot x} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}} \frac{dk}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(k) e^{-\frac{k^2}{2\ell^2}} e^{ik \cdot x} \frac{dk}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} =: \check{F}_\ell(x), \end{aligned}$$

mit $F_\ell(k) = \widehat{f}(k) e^{-\frac{k^2}{2\ell^2}}$.

SCHRITT 2: Da $\{\delta_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine Familie guter Kerne ist, vgl. Beispiel (b) nach Definition 10.41, gilt insbesondere 10.42 (1), also

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|f * \delta_\ell - f\|_{L^1} = 0.$$

Aus dem Lemma am Anfang des Beweises folgt dann, dass es eine Teilfolge $\{f * \delta_{\ell_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ gibt mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (f * \delta_{\ell_j})(x) = f(x)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$.

SCHRITT 3: Aus dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt nun

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \check{F}_\ell(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x} \lim_{j \rightarrow \infty} e^{-\frac{k^2}{2\ell^2}} \frac{dk}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \check{f}(x).$$

SCHRITT 4: Zusammenfassend haben wir also

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} (f * \delta_{\ell_j})(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \check{F}_{\ell_j}(x) = \check{f}(x)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$. ■

1.1. Eigenschaften der Fouriertransformation.

THEOREM 11.4 (ALGEBRAISIERUNG DER ABLEITUNG). Sei $f \in C^m(\mathbb{R}^d)$ und $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\widehat{\partial^\alpha f}(k) = (ik)^\alpha \widehat{f}(k).$$

BEWEIS FÜR $d = 1$. Für $m = 1$ erhalten wir mittels partieller Integration

$$\widehat{f}'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left([e^{-ikx} f(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-ik) e^{-ikx} f(x) dx \right).$$

Da $f' \in L^1$ nach Voraussetzung existieren die Grenzwerte¹ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, denn nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y) dy,$$

insbesondere also

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_0^x f'(y) dy = f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(y) dy.$$

Wegen $f \in L^1$ kann der Grenzwert aber nur gleich null sein², also

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Damit haben wir aber gezeigt, dass die Randterme bei der partiellen Integration verschwinden, $[e^{-ikx} f(x)]_{-\infty}^{\infty} = 0$, und somit

$$\widehat{f}'(k) = ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx = ik \widehat{f}(k).$$

Für $m > 1$ folgt die Behauptung durch Induktion in m . ■

Die Beweisidee für $d \geq 2$ ist analog mittels partieller Integration bezüglich der Koordinaten x_j , in deren Richtungen abgeleitet wird.

Es gilt auch die Umkehrung:

THEOREM 11.5. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Falls

$$x \mapsto x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq m$, dann gilt $\widehat{f} \in C^m(\mathbb{R}^d)$ und

$$(\partial^\alpha \widehat{f})(k) = \mathcal{F} [(-ix)^\alpha f(x)](k).$$

BEWEIS FÜR $d = 1$. Wir betrachten für $m = 1$ den Differenzenquotienten bei $k \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\frac{\widehat{f}(k+h) - \widehat{f}(k)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixh} - 1}{h} e^{-ikx} f(x) dx$$

für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegen

$$\left| \frac{e^{-ixh} - 1}{h} \right| \leq |x|$$

und der Annahme, dass $xf \in L^1$, folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(k+h) - \widehat{f}(k)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-ixh} - 1}{h} \right) e^{-ikx} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-ikx} f(x) dx.$$

Für $m > 1$ folgt die Behauptung wieder per Induktion. ■

¹Dies ist im Allgemeinen für $f \in L^1$ nicht der Fall: man kann Beispiele von (absolut) integrierbaren Funktionen konstruieren, für die $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ nicht existiert.

²Wäre der Grenzwert von null verschieden, also z.B. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha > 0$, dann gäbe es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ derart, dass $f(x) > \alpha - \varepsilon$ für alle $x > R$. Wählt man nun $\varepsilon > 0$ so, dass $\alpha - \varepsilon > 0$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \geq \int_R^\infty |f(x)| dx \geq \int_R^\infty (\alpha - \varepsilon) dx = \infty,$$

im Widerspruch zur Integrierbarkeit von f . Die anderen Fälle zeigt man ähnlich.

Die Fouriertransformation verträgt sich auch gut mit der Faltung:

THEOREM 11.6. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \widehat{f} \widehat{g}.$$

BEWEIS. Der Beweis folgt leicht aus dem Satz von Fubini, siehe Übung. ■

1.2. Anwendung: Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen. Wir wollen die allgemeine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{x} - x = f \quad \text{mit} \quad f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$$

bestimmen. Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen (vgl. Kapitel 8) wissen wir, dass der Lösungsraum einer inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ein zweidimensionaler affiner Raum der Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{hom}} + x_s$$

ist, wobei \mathcal{L}_{hom} den (zweidimensionalen) Lösungsraum der homogenen Gleichung $\ddot{x} - x = 0$ bezeichnet und x_s eine Lösung der vollen inhomogenen Gleichung ist. Um diese zu bestimmen, können wir die Fouriertransformation verwenden. Bezeichnet φ die Fouriertransformierte von x_s , so erfüllt diese die (algebraische) Gleichung

$$-(k^2 + 1)\varphi(k) = \widehat{f}(k), \quad k \in \mathbb{R},$$

sodass wir nach Umstellen

$$\varphi(k) = -\frac{\widehat{f}(k)}{1 + k^2} =: -\widehat{g}(k)\widehat{f}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{R}$$

erhalten. Da $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, ist dies nach dem Fourierumkehrsatz 11.3 tatsächlich die Fouriertransformierte einer Funktion g , sodass

$$x_s(t) = -\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}\widehat{f})(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)(t).$$

Es bleibt also die Funktion g zu bestimmen,

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + k^2} e^{ikt} dk.$$

Wie im Beispiel 2. in Abschnitt 5.3 können wir dies mithilfe des Residuensatzes tun. Ähnlich zu den Abschätzungen dort kann man zeigen, dass für $t > 0$ der Hilfsweg in der oberen Halbebene im Limes $R \rightarrow \infty$ nichts beiträgt und man

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + k^2} e^{ikt} dk = 2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\frac{e^{ikt}}{1 + k^2} \right) = \pi e^{-t} \quad \text{für } t > 0$$

erhält. Für $t < 0$ muss man über die untere Halbebene schließen und erhält³

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + k^2} e^{ikt} dk = -2\pi i \operatorname{Res}_{-i} \left(\frac{e^{ikt}}{1 + k^2} \right) = \pi e^t \quad \text{für } t < 0.$$

Für $t = 0$ ist

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + k^2} e^{ikt} dk = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + k^2} dk = \pi.$$

Insgesamt haben wir also

$$g(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|t|},$$

³Vorsicht mit der Orientierung der Kurve in diesem Fall, daher das negative Vorzeichen!

und damit

$$x_s(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)(t) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t-s|} f(s) ds.$$

Wegen $\mathcal{L}_{\text{hom}} = \text{span}\{e^t, e^{-t}\}$ können wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} - x = f$ daher schreiben als

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + x_s(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t-s|} f(s) ds,$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ beliebig.

2. Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^d)$

Wie wir gesehen haben ist die Fouriertransformation zunächst natürlich definiert auf $L^1(\mathbb{R}^d)$, liefert aber nicht unbedingt wieder eine integrierbare Funktion. Dies hatten wir zum Beispiel auch beim Fourierinversionssatz gesehen, wo explizit angenommen werden musste, dass f und \widehat{f} in $L^1(\mathbb{R}^d)$ sind. Es stellt sich heraus, dass die Fouriertransformation besonders gute Abbildungseigenschaften auf dem *Hilbertraum* der quadratintegrierbaren Funktionen

$$L^2(\mathbb{R}^d) := \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar} : \|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

besitzt. Dieser Raum ist relevant für die Quantenmechanik, da Wellenfunktionen durch Funktionen $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ beschrieben werden.

THEOREM 11.7 (UND DEFINITION). *Der Raum $L^2(\mathbb{R}^d)$ ist ein Hilbertraum, d.h. ein vollständiger normierter Raum mit einem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} g(x) dx,$$

das heißt einer Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$$

mit den folgenden Eigenschaften für alle $f, g, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

- (i) $\langle f, f \rangle \geq 0$ und $\langle f, f \rangle = 0$ genau dann wenn $f = 0$ (positiv definit),
- (ii) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ (konjugiert symmetrisch),
- (iii) $\langle f, \lambda g + \mu h \rangle = \lambda \langle f, g \rangle + \mu \langle f, h \rangle$ (linear in der zweiten Komponente).

Das Skalarprodukt erzeugt die Norm in dem Sinn dass

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle.$$

Da die Fouriertransformation nicht direkt auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ definiert werden kann (warum?), betrachten wir sie zunächst auf dem *Schwartz-Raum* aller glatten und schnell abfallenden Funktionen.

DEFINITION 11.8. Der *Schwartz-Raum* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist der Funktionenraum

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : x \mapsto x^\alpha \partial^\beta f(x) \text{ ist beschränkt für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \right\}.$$

Beispiele

- (1) Glatte Funktionen mit kompaktem Träger $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sind in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, zum Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\sum_{j=1}^d \frac{1}{1-|x_j|^2}\right), & |x_j| < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2) Für jedes Polynom p definiert

$$f(x) := p(x)e^{-|x|^2}$$

eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Aufgrund des schnellen Abfalls im Unendlichen von Funktionen in \mathcal{S} (schneller als jedes Polynom), gilt

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d).$$

Man kann zeigen, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sogar *dicht* in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, das heißt

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \exists \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0.$$

(Zum Beweis approximiert man f durch $f\chi_R$, $R > 0$, wobei $\chi_R = 1$ auf B_R und $\chi_R = 0$ auf B_R^c , und $f\chi_R \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ durch Faltung mit einer glatten Dirac-Folge.)

THEOREM 11.9. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist auch $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und die Restriktion der Fouriertransformation auf den Schwartz-Raum,

$$\mathcal{F}_S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

ist ein Isomorphismus. Weiter gilt

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$$

für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, wobei

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} g(x) \, dx$$

das L^2 -Skalarprodukt bezeichnet.

BEWEIS. (1) Da

$$k^\alpha \partial_\beta \widehat{f}(k) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F} \left(\partial^\alpha (\cdot)^\beta f \right) (k)$$

für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ (siehe Theorem 11.4 und 11.5), folgt aus $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, dass die Abbildung $k \mapsto k^\alpha \partial_\beta \widehat{f}(k)$ beschränkt ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, und damit $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(2) Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, wurde die Umkehrung von \mathcal{F}_S durch die Fourierinversionsformel Theorem 11.3 bereits identifiziert.

(3) Mit dem Satz von Fubini und der Inversionsformel folgt

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{f}(k)} \widehat{g}(k) \, dk = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ik \cdot x} \frac{dx}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \right)} \widehat{g}(k) \, dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(k) e^{ik \cdot x} \frac{dk}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} g(x) \, dx = \langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

■

Bemerkung: Da nicht alle Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ integrierbar sind, konvergiert

$$\widehat{f}(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{|x| < R} f(x) e^{-ik \cdot x} \, dx$$

nicht für alle $k \in \mathbb{R}^d$, aber für *fast alle*:

THEOREM 11.10. *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}_S : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ lässt sich eindeutig stetig auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen. Die resultierende Abbildung*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$

ist linear und unitär, das heißt für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \langle f, g \rangle$$

(Plancherel Identität).

Bemerkungen:

- (1) Die Stetigkeit der Abbildung $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ impliziert *nicht*, dass die Funktion $\mathcal{F}f$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ stetig ist! Da jede L^2 -Funktion Fouriertransformierte einer L^2 -Funktion ist, ist diese im Allgemeinen unstetig. Im Gegensatz dazu ist die Fouriertransformierte einer L^1 -Funktion immer eine stetige und beschränkte Funktion.⁴
- (2) Aus der Plancherel-Identität folgt insbesondere, dass

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}f \rangle} = \|\mathcal{F}f\|_2.$$

3. Ausblick: Temperierte Distributionen

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir uns kurz mit Distributionen befassen. Distributionen f kann man sich vorstellen als *verallgemeinerte Funktionen*, denen nur zusammen mit Testfunktionen φ im “Integral” $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x) dx$ ein Sinn gegeben ist.

3.1. Temperierte Distributionen. Als Raum der Testfunktionen kann zum Beispiel der *Schwartz-Raum* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gewählt werden. Damit lassen sich sogenannte *temperierte Distributionen* definieren:

DEFINITION 11.11. Eine *temperierte Distribution* f ist eine stetige, lineare Abbildung

$$f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto (f, \varphi) := f(\varphi),$$

das heißt

- (1) (Linearität) für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$(f, \varphi + \lambda\psi) = (f, \varphi) + \lambda(f, \psi)$$

- (2) (Stetigkeit) für jede Folge $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, die in \mathcal{S} gegen ein $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta (\varphi_n(x) - \varphi(x))| = 0 \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d,$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(f, \varphi_n) - (f, \varphi)| = 0.$$

Den Raum aller temperierten Distributionen bezeichnet man mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Bemerkungen

⁴Die Beschränktheit folgt direkt aus der Integrierbarkeit von f , denn

$$|\widehat{f}(k)| \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < \infty.$$

Für die Stetigkeit betrachte man zu gegebenem $k \in \mathbb{R}^d$ eine beliebige Folge $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ mit $k_n \rightarrow k$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}(k_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ik_n \cdot x} \frac{dx}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-ik_n \cdot x} \frac{dx}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ik \cdot x} \frac{dx}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} = \widehat{f}(k),$$

wobei wir verwendet haben, dass die Abbildung $k \mapsto e^{-ik \cdot x}$ stetig ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|f(x)e^{-ik_n \cdot x}| \leq |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt, und somit der Satz über majorisierte Konvergenz anwendbar ist.

- (1) Jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ lässt sich mittels

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x) \, dx$$

mit einer Distribution identifizieren. Da Distributionen aufgrund ihrer Definition im Allgemeinen viele Eigenschaften des Integrals besitzen, verwendet man die (symbolische) *Integralschreibweise* oft auch für beliebige Distributionen.

- (2) In (1) genügt es, dass die Funktion f *lokal integrierbar* ist, d.h. integrierbar auf jedem Ball $B_R, R > 0$, und höchstens polynomiell wächst. Zum Beispiel definiert die Funktion $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ für $\alpha < d$ via

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x|^\alpha} \varphi(x) \, dx$$

eine temperierte Distribution auf \mathbb{R}^d . Der Ausdruck auf der rechten Seite ist wohldefiniert, denn wegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ können wir abschätzen

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x|^\alpha} \varphi(x) \, dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\varphi(x)|}{|x|^\alpha} \, dx = \int_{|x| \leq 1} \frac{|\varphi(x)|}{|x|^\alpha} \, dx + \int_{|x| > 1} \frac{|\varphi(x)|}{|x|^\alpha} \, dx \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x|^\alpha} \, dx + \int_{|x| > 1} |\varphi(x)| \, dx. \end{aligned}$$

Da $\alpha < d$, konvergiert das Integral

$$\int_{|x| \leq 1} \frac{1}{|x|^\alpha} \, dx = |S^{d-1}| \int_0^1 r^{d-1-\alpha} \, dr = \frac{|S^{d-1}|}{d-\alpha},$$

und da $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ ist auch $\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi| \, dx < \infty$.

- (3) Man kann zeigen, dass sich jede temperierte Distribution f durch eine Folge von Testfunktionen $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ approximieren lässt, d.h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi) = (f, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Man sagt dann, dass f_k im distributionellen Sinn (oder in \mathcal{S}') gegen f konvergiert.

3.2. Dirac'sche Delta-Distribution.

DEFINITION 11.12. Die Dirac'sche Delta-Distribution $\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert über

$$(\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta(x)\varphi(x) \, dx := \varphi(0).$$

Mithilfe einer geeigneten Koordinatentransformation und dem Satz über majorisierte Konvergenz kann man zeigen, dass δ der Grenzwert in \mathcal{S}' von Dirac-Folgen $\{\delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist, das heißt für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \delta_k(x)\varphi(x) \, dx = \varphi(0).$$

Die Schreibweise als Integral bekommt durch folgenden *Kalkül* weitere Berechtigung:

- (1) Für $a \in \mathbb{R}^d$ definiert

$$(\delta_a, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta(x-a)\varphi(x) \, dx := \varphi(a)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die Delta-Distribution bei $a \in \mathbb{R}^d$.

- (2) Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wird durch

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta(\lambda x)\varphi(x) \, dx := \frac{1}{|\lambda|^d} \int_{\mathbb{R}^d} \delta(x)\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) \, dx = \frac{\varphi(0)}{|\lambda|^d}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ eine weitere Distribution definiert. Es gilt also

$$\delta(\lambda x) = \frac{\delta(x)}{|\lambda|^d},$$

insbesondere ist die Delta-Distribution eine *gerade Distribution*, d.h. $\delta(-x) = \delta(x)$.

- (3) Allgemeiner sei $h \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ mit endlich vielen Nullstellen x_j , $j = 1, \dots, N$, für welche $\det Dh(x_j) \neq 0$. Dann setzt man

$$\delta(h(x)) := \sum_{j=1}^N \frac{1}{|\det Dh(x_j)|} \delta(x - x_j).$$

3.3. Operationen auf Distributionen. Da sich jede Distribution durch Testfunktionen approximieren lässt (vgl. Bemerkung 3 nach Definition 11.11), kann man Operationen, die auf Testfunktionen wirken, auf Distributionen verallgemeinern. Wir haben im Rahmen der Delta-Distribution schon Translationen und Skalierungen kennen gelernt.

3.3.1. Differentiation von Distributionen.

DEFINITION 11.13. Für eine temperierte Distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ definiert man die (distributionelle) Ableitung $\partial^\alpha f$ von f durch

$$(\partial^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Beispiel: Für die *Heaviside-Funktion*

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

gilt im distributionellen Sinn

$$\Theta' = \delta.$$

BEWEIS. Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine beliebige Testfunktion. Dann gilt

$$(\Theta', \varphi) = -(\Theta, \varphi') = - \int_{\mathbb{R}} \Theta(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = -[\varphi(x)]_0^\infty = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

wobei wir verwendet haben, dass Schwartz-Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Unendlichen verschwinden, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$. ■

3.3.2. *Fouriertransformation von Distributionen.* Für jede Testfunktion f , $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt wegen der Plancherel-Identität und der Fourierinversionsformel

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(k) \varphi(k) dk &= \langle \overline{\varphi}, \mathcal{F}_S f \rangle = \langle \mathcal{F}_S \mathcal{F}_S^{-1} \overline{\varphi}, \mathcal{F}_S f \rangle = \langle \mathcal{F}_S^{-1} \overline{\varphi}, f \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathcal{F}_S^{-1} \overline{\varphi}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(k) e^{-ikx} \frac{dk}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \right) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{\varphi}(x) dx. \end{aligned}$$

Motiviert von dieser Rechnung lässt sich die Fouriertransformation von temperierten Distributionen definieren:

DEFINITION 11.14. Für eine temperierte Distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definiert man die *Fouriertransformierte* \widehat{f} als Distribution durch

$$(\widehat{f}, \varphi) := (f, \widehat{\varphi}) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Beispiel: Fouriertransformation der Delta-Distribution: Es gilt

$$\widehat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

BEWEIS. Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ eine Testfunktion. Dann gilt

$$(\widehat{\delta}, \varphi) = (\delta, \widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}}, \varphi \right).$$

■

3.3.3. *Faltung von Distributionen mit Testfunktionen.* Für beliebige Testfunktionen $\rho, \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\psi * \rho)(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) (\widetilde{\rho} * \varphi)(x) dx,$$

wobei $\widetilde{\rho}(x) := \rho(-x)$.

Dazu überlegt man sich zunächst, dass die Faltung $\psi * \rho$ zweier Testfunktionen wieder eine Testfunktion ist. In der Tat, da $\rho, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, gilt nach Satz ??

$$\widehat{\psi * \rho} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \widehat{\psi} \widehat{\rho} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

und da die Fouriertransformation ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist, muss

$$\psi * \rho = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\psi} \widehat{\rho}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

wieder eine Testfunktion sein. Die Behauptung folgt dann mit Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (\psi * \rho)(x) \varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \rho(x-y) dy \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \widetilde{\rho}(y-x) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) (\varphi * \widetilde{\rho})(y) dy \end{aligned}$$

und der Kommutativität der Faltung. Dies motiviert die Definition der Faltung einer temperierten Distribution mit einer Testfunktion.

DEFINITION 11.15. Sei $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ eine temperierte Distribution und $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann wird durch

$$(f * \rho, \varphi) := (f, \widetilde{\rho} * \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

eine temperierte Distribution $f * \rho \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definiert.

Beispiel (δ als Einselement der Faltung): Im distributionellen Sinn gilt

$$\delta * \varphi = \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Heuristisch folgt dies aus

$$\widehat{\delta * \varphi} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \widehat{\delta} \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}.$$

BEWEIS. Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(\delta * \varphi, \psi) = (\delta, \widetilde{\varphi} * \psi) = (\widetilde{\varphi} * \psi)(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\varphi}(0-y) \psi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \psi(y) dy = (\varphi, \psi).$$

■

4. Anwendung: Green'sche Funktion des Laplace-Operators

Eine temperierte Distribution $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ heißt *Fundamentallösung der Laplace-Gleichung*, falls

$$-\Delta G = \delta$$

im distributionellen Sinn gilt, das heißt, falls

$$(G, -\Delta\varphi) = (-\Delta G, \varphi) = (\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

gilt.

THEOREM 11.16. *Die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung ist gegeben durch*

$$G(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & d = 2, \\ \frac{1}{(d-2)|S^{d-1}|} \frac{1}{|x|^{d-2}}, & d \geq 3. \end{cases}$$

Ist $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, dann erfüllt $u := G * \psi$ die Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = \psi \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

im distributionellen Sinn.

Bemerkung: Die Oberfläche der Kugel $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ ist gegeben durch

$$|S^{d-1}| = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

mit der Eulerschen Gammafunktion $\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} ds$ für $t > 0$.

BEWEIS FÜR $d = 3$. Wir zeigen zunächst den zweiten Teil: ist $-\Delta G = \delta$ im distributionellen Sinn, so gilt für $u = G * \psi$ und alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} (-\Delta u, \varphi) &= -(u, \Delta\varphi) = -(G * \psi, \Delta\varphi) = -(G, \tilde{\psi} * \Delta\varphi) = -(G, \Delta(\tilde{\psi} * \varphi)) \\ &= (-\Delta G, \tilde{\psi} * \varphi) = (\delta, \tilde{\psi} * \varphi) = (\delta * \psi, \varphi) = (\psi, \varphi) \end{aligned}$$

und damit im Sinn von temperierten Distributionen die Gleichheit

$$-\Delta u = \psi.$$

Es bleibt also die Fundamentallösung G zu berechnen. Im Sinne von Distributionen gilt

$$\mathcal{F}(-\Delta G) = |k|^2 \mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(\delta) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}},$$

woraus sofort folgt, dass

$$\widehat{G} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|k|^2}$$

im distributionellen Sinn gilt, also G über die (distributionelle) inverse Fouriertransformierte von G gewonnen werden kann.

Wir berechnen diese in $d = 3$ Dimensionen, die Rechnung für $d > 3$ ist ähnlich (und benötigt Bessel-Funktionen, die an dieser Stelle nicht eingeführt werden sollen). In $d = 2$ Dimensionen ist die Funktion $\frac{1}{|k|^2}$ nicht mehr lokal integrierbar, deshalb ist der Beweis hier etwas aufwändiger.

Wir wollen also zeigen, dass für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ gilt

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(k)}{|k|^2} dk = (\widehat{G}, \varphi) = (G, \widehat{\varphi}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\varphi}(x)}{|x|} dx.$$

Man bemerke, dass die Funktion \widehat{G} integrierbar in einer Umgebung von $k = 0$ ist, jedoch im Unendlichen zu langsam abfällt, um integrierbar zu sein. Da jedoch $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ schneller als jedes Polynom abfällt, können wir mit majorisierter Konvergenz schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(k)}{|k|^2} dk &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{\{|k| \leq N\}} \frac{\varphi(k)}{|k|^2} dk \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{\{|k| \leq N\}} \frac{1}{|k|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi}(x) e^{ik \cdot x} \frac{dx}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \right) dk \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\varphi}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{\{|k| \leq N\}} \frac{1}{|k|^2} e^{ik \cdot x} dk \right) dx, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt mithilfe von Fubini die Integrationsreihenfolge vertauscht wurde. In Polarkoordinaten (mit Nordpol bei $\frac{x}{|x|}$, d.h. $k \cdot x = |k||x| \cos \theta$, wobei $\theta \in (0, \pi)$ den Winkel zwischen k und x bezeichnet) berechnet man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{\{|k| \leq N\}} \frac{1}{|k|^2} e^{ik \cdot x} dk &= \int_0^N \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} e^{i|x|r \cos \theta} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr = 2\pi \int_0^N \int_{-1}^1 e^{i|x|ru} du dr \\ &= \frac{4\pi}{|x|} \int_0^N \frac{\sin(|x|r)}{r} dr = \frac{4\pi}{|x|} \int_0^{N|x|} \frac{\sin \rho}{\rho} d\rho. \end{aligned}$$

Da $\int_0^{N|x|} \frac{\sin \rho}{\rho} d\rho \rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin \rho}{\rho} d\rho = \frac{\pi}{2}$ (vgl. Beispiel 3. in Abschnitt 5.3), und da die Funktion $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ local integrierbar ist, können wir Fubini und majorisierte Konvergenz anwenden, um

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(k)}{|k|^2} dk &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\varphi}(x)}{|x|} \int_0^{N|x|} \frac{\sin \rho}{\rho} d\rho dx \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\varphi}(x)}{|x|} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{N|x|} \frac{\sin \rho}{\rho} d\rho dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\widehat{\varphi}(x)}{|x|} dx \end{aligned}$$

zu erhalten. ■

Partielle Differentialgleichungen – eine Übersicht

1. Partielle Differentialgleichungen

DEFINITION 12.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Eine Gleichung der Form

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in U, \quad (12.1)$$

heißt partielle Differentialgleichung der Ordnung k , wobei

$$F : \mathbb{R}^{d^k} \times \mathbb{R}^{d^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben ist und die Funktion $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht wird.

Die partielle Differentialgleichung (12.1) heißt *linear*, falls sie von der Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x)$$

mit gegebenen Funktionen a_α , $|\alpha| \leq k$, und f ist. Eine lineare PDG heißt *homogen*, falls $f = 0$.

Beispiele linearer Differentialgleichungen:

- (1) Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$,
- (2) Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$,
- (3) Helmholtz-Gleichung (Eigenwertgleichung) $-\Delta u = \lambda u$,
- (4) Lineare Transportgleichung $\partial_t u + b \cdot \nabla u = 0$,
- (5) Liouville-Gleichung $\partial_t u - \nabla \cdot (bu) = 0$,
- (6) Wärmeleitungs/Diffusionsgleichung $\partial_t u - \Delta u = 0$,
- (7) Schrödingergleichung $i\partial_t u = -\Delta u + Vu$,
- (8) Wellengleichung $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$,

Wichtig sind auch **Systeme partieller Differentialgleichung**, z.B. die *Maxwell-Gleichungen* der Elektrodynamik (im Vakuum)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= \rho & \nabla \times E &= -\partial_t B \\ \nabla \cdot B &= 0 & \nabla \times B &= \partial_t E + j \end{aligned}$$

für das elektrische Feld $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und die magnetische Induktion $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bei vorgegebener Stromdichte $j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und Ladungsdichte $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Für lineare Gleichungen gilt immer das *Superpositionsprinzip*: sind u_1 und u_2 Lösungen einer linearen PDG, so ist auch $u_1 + u_2$ Lösung.

2. Beispiel: Eindimensionale homogene Wellengleichung

Wir betrachten die PDG (homogene Wellengleichung in 1+1 Dimensionen)

$$\partial_t^2 u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = 0. \quad (12.2)$$

Diese kann geschrieben werden als

$$(\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u(t, x) = 0. \quad (12.3)$$

Ist also $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ eine Lösung von (12.2), so legt (12.3) die Koordinatentransformation

$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t,$$

nahe, d.h. $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ und $t = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$. Setzt man

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{1}{2}(\xi - \eta), \frac{1}{2}(\xi + \eta)\right),$$

so gilt

$$\begin{aligned} \partial_\xi \partial_\eta v(\xi, \eta) &= \partial_\xi \left(-\frac{1}{2} \partial_t u\left(\frac{1}{2}(\xi - \eta), \frac{1}{2}(\xi + \eta)\right) + \frac{1}{2} \partial_x u\left(\frac{1}{2}(\xi - \eta), \frac{1}{2}(\xi + \eta)\right) \right) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x) u\left(\frac{1}{2}(\xi - \eta), \frac{1}{2}(\xi + \eta)\right) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber, dass es eine Funktion $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$ geben muss mit

$$\partial_\eta v(\xi, \eta) = \tilde{f}(\eta).$$

Bezeichnet f eine Stammfunktion von \tilde{f} , so gibt es eine Funktion $g \in C^2(\mathbb{R})$ so, dass

$$v(\xi, \eta) = f(\eta) + g(\xi).$$

Rücktransformation liefert dann, dass

$$u(t, x) = f(x - t) + g(x + t)$$

die PDG (12.2) löst. Durch Einsetzen überzeugt man sich andererseits leicht, dass für beliebige $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ durch

$$u(t, x) = f(x - t) + g(x + t) \tag{12.4}$$

eine ganze Familie von Lösungen der eindimensionalen Wellengleichung (12.2) gegeben ist.

Oft spezifiziert man das Problem durch Angabe geeigneter Rand- bzw. Anfangsbedingungen. Für die Wellengleichung auf \mathbb{R} ist typischerweise $u(0, x) = \varphi(x)$ und $\partial_t u(0, x) = \psi(x)$ gegeben. Durch Einsetzen in (12.4) erhält man dann

$$\begin{aligned} u(0, x) &= f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ \partial_t u(0, x) &= -f'(x) + g'(x) = \psi(x), \end{aligned}$$

und überzeugt sich durch Ableiten der ersten Gleichung leicht, dass damit

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \psi(y) \, dy, \\ f(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \psi(y) \, dy, \end{aligned}$$

sodass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) &= 0 \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) &= \psi(x) \end{aligned}$$

gegeben ist durch die *d'Alembert-Formel*

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(\varphi(x - t) + \varphi(x + t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(y) \, dy.$$

Man sagt, dass eine PDG *wohlgestellt* ist, falls

- (i) das Problem eine Lösung besitzt,
- (ii) die Lösung eindeutig ist,
- (iii) die Lösung stetig von den Daten (Anfangsdaten, Randdaten, Inhomogenität) abhängt.

Es gibt keine allgemeine Theorie, um partielle Differentialgleichungen zu lösen. Ein paar Grundtypen und Aspekte deren Lösungstheorie haben wir jedoch schon kennen gelernt:

- (1) In Abschnitt 10.6 und 11.4 haben wir gesehen, wie man die Laplace-Gleichung in der oberen Halbebene mit Randbedingung und Poisson-Gleichungen in \mathbb{R}^d lösen kann. Es handelt sich dabei um typische Beispiele *elliptischer PDGen*.
- (2) Mithilfe der Fouriertransformation wurden in der Übung Lösungsansätze für die Wärmeleitungs-/Diffusionsgleichung (der Prototyp einer *parabolischen PDG*) und die freie Schrödingergleichung entwickelt.
- (3) Die oben behandelte eindimensionale Wellengleichung ist ein typisches Beispiel einer *hyperbolischen PDG*.

Literaturverzeichnis

- [1] L.C. EVANS, [Partial Differential Equations. Second Edition](#). Graduate Studies in Mathematics **19**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. ISBN: 978-0-8218-4974-3. [MR 2597943](#). [Zbl 1194.35001](#).
- [2] K. JÄNICH, [Funktionentheorie](#). 6. Auflage. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. ISBN: 978-3-540-20392-6. [MR 1231973](#). [Zbl 1250.30001](#). 28
- [3] K. KÖNIGSBERGER, [Analysis 2](#). 5., korrigierte Auflage. Springer-Lehrbuch. Grundwissen Mathematik. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. ISBN: 978-3-540-20389-6. [MR 1251736](#). [Zbl 1097.26501](#). 26
- [4] B. SIMON, [Basic Complex Analysis](#). A Comprehensive Course in Analysis, Part **2A**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. ISBN: 978-1-4704-1100-8. [MR 3443339](#). [Zbl 1332.00004](#). 28
- [5] E. M. STEIN, und R. SHAKARCHI, [Fourier Analysis: An Introduction](#). Princeton Lectures in Analysis I. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. ISBN: 978-0-691-11384-5. [MR 1970295](#). [Zbl 1026.42001](#).
- [6] E. M. STEIN, und R. SHAKARCHI, [Complex Analysis](#). Princeton Lectures in Analysis II. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. ISBN: 978-0-691-11385-2. [MR 1976398](#). [Zbl 1020.30001](#). 28
- [7] R. STRICHARTZ, [A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms](#). Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994. ISBN: 0-8493-8273-4. [MR 1276724](#). [Zbl 0854.46035](#).



This document is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License (CC BY-NC-ND 4.0) <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.en>