Übungsblatt 2

1) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die nachstehende Ungleichung lösen

$$\frac{3x+2}{5x+4} > \frac{7x+6}{9x+8}.$$

Versuchen Sie, Ihr Ergebniss auch graphisch zu veranschaulischen - die Genauigkeit einer Handskizze ist vollkommen ausreichend. 5 + 1 Punkte

2) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

   a) $y^2 = |y|^2$,

   b) $|x+y| = |x| + |y|$ genau dann wenn $xy \geq 0$,

   c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ - nutzen Sie hier nur Lemma 1.28.a) und die Dreiecksungleichung, Fallunterscheidungen sind unnötig.

5 Punkte

3) a) Seien $M, N \subset \mathbb{R}$ nichtleere und von oben beschränkte Mengen. Beweisen Sie sorgfältig, dass

$$\sup(M \cup N) = \max(\sup(M), \sup(N)).$$

   b) Entscheiden Sie für jede der nachfolgenden Mengen, ob i) Infinumum, ii) Minimum, iii) Supremum und iv) Maximum existiert:

$$M_1 = \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, \sqrt{3}), M_2 = \{(-\frac{1}{2})^n + \frac{3}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}\},$$

$$M_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right], M_4 = [0, \frac{2}{5}] \setminus M_3$$

   In jedem Fall, geben Sie den entsprechenden Wert an oder, dass er nicht existiert (jeweils ohne Beweis).

6 Punkte

4) Zeigen Sie, dass es für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a = b^3$. Ist dieses b eindeutig? *[Hinweis: warum reicht es, $a > 0$ zu betrachten?]* 10 Punkte

Besprechung: Abgabe am 5.11.2019, 11.10 Uhr Hörsaal 9