3. Übungsblatt zu der Vorlesung "Grundwissen Geometrie"

Leipzig, den 15.11.2019

Abgabe: Postfach in A 514 bis Donnerstag, 28.11.2019, 13:00

In den Aufgaben 9.) – 12.) sei $(E, \mathcal{G})$ eine Ebene, die die acht Axiome $(A1)$ – $(A8)$ erfüllt.

9.) Beweisen Sie Satz 3.20 der Vorlesung.

Hinweis: Benutzen Sie Satz 2.4 und Aufgabe 7.

(8 Punkte)

10.) Es seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte in E; ferner sei $g_1 := g(A, B)$, $g_2 := g(B, C)$, $g_3 := g(C, A)$. Es sei H_1 bzw. H_3 bzw. H_5 diejenige zu g_1 bzw. g_2 bzw. g_3 gehörige offene Halbebene, die C bzw. A bzw. B enthält. Weiter sei H_2 bzw. H_4 bzw. H_6 die zu H_1 bzw. H_2 bzw. H_3 entgegengesetzte offene Halbebene.

i) Fertigen Sie eine zugehörige Skizze an, in der die 7 – jeweils nicht leeren – Durchschnitte

$$H_1 \cap H_3 \cap H_5\,;\ H_2 \cap H_3 \cap H_5\,,\ H_1 \cap H_4 \cap H_5\,,\ H_1 \cap H_3 \cap H_6;$$
$$H_2 \cap H_4 \cap H_5\,,\ H_2 \cap H_3 \cap H_6\,,\ H_1 \cap H_4 \cap H_6$$

klar markiert sind.

ii) Zeigen Sie – etwa mit Hilfe des Satzes von Pasch: $H_2 \cap H_4 \cap H_6 = \emptyset$.

(8 Punkte)

11.) Es seien A, B, C wie in Aufgabe 10.) – und damit nicht kollinear; die offenen Halbebenen H_1, H_3, H_5 seien ebenfalls wie in Aufgabe 10.) – mit zugehörigen abgeschlossenen Halbebenen $\overline{H_1}, \overline{H_3}, \overline{H_5}$. Dann ist das *Dreieck* $\Delta(A, B, C)$ mit den Eckpunkten A, B, C gegeben durch

$$\Delta(A, B, C) := \overline{H_1} \cap \overline{H_3} \cap \overline{H_5}.$$

Beweisen Sie: $\Delta(A, B, C)$ ist auch die Vereinigung aller Strecken der Gestalt $\overline{XC}$, wobei X alle Punkte der Strecke $\overline{AB}$ durchläuft.

(6 Punkte)

12.) Für 3 Geraden $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$ betrachten wir auf $E' := E \setminus (g_1 \cup g_2 \cup g_3)$ diejenige Äquivalenzrelation, für die 2 Punkte $X, Y \in E'$ genau dann äquivalent sind, wenn sie bezüglich jeder dieser drei Geraden in der gleichen offenen Halbebene liegen. – Anschaulich sind die Äquivalenzklassen damit genau die Zusammenhangskomponenten von E'.

i) Zeichnen Sie 3 paarweise verschiedene Geraden so, dass es genau 4 bzw. 6 Äquivalenzklassen gibt; hier sind also zwei entsprechende Skizzen anzufertigen.

ii) Nach Aufgabe 10.) wissen wir bereits: Es kann auch 7, aber nicht 8 solche Äquivalenzklassen geben.
Entscheiden Sie – mit Begründung, ob es auch genau 5 Äquivalenzklassen – bei ebenfalls 3 gegebenen Geraden – geben kann.

(8 Punkte)