

11. Übung zur Vorlesung Analysis  
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Dienstag, 14.1.2020

Abgabe: Dienstag, 21.1.2020 in der Vorlesung oder bis spätestens 13:00 Uhr im Postfach Hardtke (die Postfächer befinden sich im Raum A 514).

**Wichtig:** Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

**Aufgabe 1** (1+2+2 Punkte). Bestimmen Sie jeweils die Lösung der folgenden Differentialgleichungen mit den angegebenen Anfangsbedingungen (geben Sie ihren Rechenweg mit an).

1)

$$y'(t) = \cos(3t)y(t) \quad \text{für } t \geq 0, \quad y(0) = 2.$$

2)

$$y'(t) = t^2 y(t) + e^{t^3/3} \quad \text{für } t \geq 1, \quad y(1) = 1.$$

3)

$$y'(t) = t(y(t) + 1) \quad \text{für } t \geq 0, \quad y(0) = 2.$$

**Aufgabe 2** (3 Punkte). In dieser Aufgabe betrachten wir eine Kette radioaktiver Zerfälle: Thorium-232 zerfällt zunächst zu Radium-228, dieses zerfällt wiederum zu Actinium-228.<sup>1</sup> Es bezeichne  $N_1(t)$  die Anzahl der Thorium-Atomkerne zur Zeit  $t$  und  $N_2(t)$  die Anzahl der Radium-Atomkerne zur Zeit  $t$ . Die entsprechenden Zerfallskonstanten seien  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Wir nehmen die Anfangsbedingungen  $N_1(0) = N_0 > 0$  und  $N_2(0) = 0$  an. Dann gilt  $N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$  (siehe Vorlesung) und

$$N_2'(t) = -\lambda_2 N_2(t) - N_1'(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Bestimmen Sie die Funktion  $N_2$  (Rechenweg mit angeben).

---

<sup>1</sup>Der erste ist ein  $\alpha$ -Zerfall, der zweite ein  $\beta$ -Zerfall.

**Aufgabe 3** (1+2+1 Punkte).

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Wir betrachten die sogenannte *Clairautsche Differentialgleichung*

$$y(t) = ty'(t) + f(y'(t)). \quad (1)$$

- 1) Zeigen Sie: Für alle  $c \in \mathbb{R}$  definiert  $y_c(t) := ct + f(c)$  eine Lösung von (1).
- 2) Angenommen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine differenzierbare Funktion mit  $f'(g(t)) = -t$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Sei  $y(t) := tg(t) + f(g(t))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $y$  ebenfalls eine Lösung von (1) ist.
- 3) Bestimmen Sie eine *nichtlineare* Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = ty'(t) + (y'(t))^2.$$

**Aufgabe 4** (2+2 Punkte).

- 1) Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Sei  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Es sei  $z$  eine differenzierbare Funktion auf  $I$  mit  $z(t) > 0$  für alle  $t \in I$ . Wir setzen  $y(t) := (z(t))^{1/(1-\alpha)}$  für  $t \in I$ . Zeigen Sie:  $y$  erfüllt die sogenannte *Bernoulli-Differentialgleichung*

$$y'(t) = f(t)y(t) + g(t)(y(t))^\alpha \quad \text{für } t \in I$$

genau dann, wenn

$$z'(t) = (1 - \alpha)(f(t)z(t) + g(t)) \quad \text{für } t \in I$$

gilt.

- 2) Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = -y(t) - e^t(y(t))^3 \quad \text{für } t \geq 0$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 1/2$ .