

Probeklausur Analysis
für Mittel- und Förderschullehramt

In der echten Klausur gelten die folgenden Bedingungen: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es können maximal 20 Punkte erreicht werden. Die Klausur ist ab 9 Punkten bestanden. Ab 18 Punkten gibt es eine 1,0.

Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1 (1+1 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Folgengrenzwerte (Rechenweg mit angeben).

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 - 1}{2n^3 + 3n + 1}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n + 3^n}$$

Aufgabe 2 (1+1 Punkte). Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren (begründen Sie ihre Antworten).

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 5^{-k}$$

$$(b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1}$$

Aufgabe 3 (1+1 Punkte). Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (der Definitionsbereich ist jeweils ganz \mathbb{R}). Geben Sie Ihren Rechenweg mit an und vereinfachen Sie das Ergebnis noch so weit wie möglich.

$$(a) f(x) := x^3 \cos(x)$$

$$(b) g(x) := \frac{e^{x^2}}{x^2 + 1}$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := e^x(x^2 + 2x - 7) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von f . Geben Sie Ihren Rechenweg mit an und vereinfachen Sie die Ergebnisse noch so weit wie möglich.

(b) Untersuchen Sie f auf lokale Extrema. Begründen Sie Ihre Antworten. Bestimmen Sie ggf. auch die Funktionswerte an den Extremstellen.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 6 (2 Punkte). Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = t^2 y(t) \quad \text{für } t \geq 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ (geben Sie Ihren Rechenweg mit an).

Aufgabe 7 (1+1+1+1 Punkte). Bestimmen Sie die folgenden Integrale (Rechenweg mit angeben).

$$(a) \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) \, dx$$

$$(b) \int_0^\pi x \cos(x/2) \, dx$$

$$(c) \int_0^1 \frac{2}{x+1} \, dx$$

$$(d) \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} \, dx$$

Hinweis zu (b): Partielle Integration.

Hinweis zu (d): Substitutionsregel.