Mathematisches Institut der Universität Leipzig
Dr. Tobias Ried
tobias.ried@mis.mpg.de

Wintersemester 2019/2020
9. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker 3

Blatt 11

Aufgabe 1 (Analytische Fortsetzung) [4 Punkte]

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ für $|z| < 1$.

(a) Bestimmen Sie die analytische Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f auf einem größtmöglichen Gebiet.
HINWEIS: Ableitung der geometrischen Reihe.

(b) Gibt es eine analytische Fortsetzung von f entlang der Wege

(i) $\gamma_1 : [0,2] \to \mathbb{C}, t \mapsto \gamma_1(t) = t$,
(ii) $\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \gamma_2(t) = 1 - \mathrm{e}^{-it}$?

Wenn ja, was ist dann der Wert der analytischen Fortsetzung im Endpunkt von γ_1 bzw. γ_2?

Aufgabe 2 (Nullstellen und Pole) [6 Punkte]

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer.

(i) Die holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ habe eine k-fache Nullstelle bei $z_0 \in U$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$ gibt mit $\widetilde{f}(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^k \widetilde{f}(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

(ii) Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f und eine l-fache Nullstelle von g ($k, l \in \mathbb{N}_0$). Zeigen Sie, dass gilt:

1. Für $k \geq l$ besitzt die analytische Fortsetzung von $\frac{f}{g}$ eine $(k-l)$-fache Nullstelle in z_0.
2. Für $k < l$ besitzt $\frac{f}{g}$ einen Pol $(l-k)$-ter Ordnung bei z_0.

(b) Klassifizieren Sie alle Singularitäten der Funktionen

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{1 + \mathrm{e}^{\frac{z}{2}}} \quad \text{und} \quad g(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2(z+1)}.$$

Aufgabe 3 (Laurent-Reihen) [5 Punkte]

Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung (mit Konvergenzgebiet) von

(a) $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^3}$ um $z_0 = 1$,

(b) $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$ um $z_0 = 0$,

(c) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ um $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

Aufgabe 4 ([W] Integralsatz von Gauß) **[5 Punkte]**

(a) Sei

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

ein Ellipsoid mit Halbachsen $a, b, c > 0$. Berechnen Sie den Fluss $\int_{\partial E} \langle A_j | \, \mathrm{d}\sigma \rangle$ durch die Oberfläche ∂E des Ellipsoids für die Vektorfelder

$$A_1(x,y,z) = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad A_2(x,y,z) = \mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) Berechnen Sie das Oberflächenintegral des Vektorfeldes $F(x,y,z) = (4x, -2y^2, z^2)$ über die Oberfläche von

$$Z = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3 \right\}$$

direkt sowie unter Zuhilfenahme des Satzes von Gauß.

ALLGEMEINE HINWEISE ZUM ÜBUNGSBLATT:

- Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind in der Vorlesung am Donnerstag, dem **16.01.2020**, abzugeben. Die Übungsblätter können auch als **Kleingruppe (2-3 Personen)** abgegeben werden.
- Die mit **[W]** gekennzeichnete Aufgabe bezieht sich als Wiederholungsaufgabe auf ein früheres Thema der Vorlesung.
- Die **Prüfung zur Vorlesung** wird *voraussichtlich* am **Freitag, 21.02.2020, von 10:00 bis 12:00 Uhr** im Theoretischen Hörsaal stattfinden. Genauere Informationen werden noch bekannt gegeben.