Mathematisches Institut der Universität Leipzig
Dr. Tobias Ried
tobias.ried@mis.mpg.de

Wintersemester 2019/2020
30. Januar 2020

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Physiker 3

Blatt 14*

Da es kein Seminar zu diesem Übungsblatt geben wird, sind sämtliche Aufgaben *optional*, es können *Zusatzpunkte* erworben werden.

Aufgabe 1 (Fouriertransformation und temperierte Distributionen) [8* Punkte]

(a) Berechnen Sie mithilfe der Plancherel-Identität das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \mathrm{d}x.$$

HINWEIS: Fouriertransformation der Indikatorfunktion.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$(L, \varphi) := \int_{\mathbb{R}} L(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

mit (i) $L(x) = x^2$ und (ii) $L(x) = |x|$ eine temperierte Distribution definiert wird (Stetigkeit braucht nicht gezeigt zu werden). Berechnen Sie die ersten beiden distributionellen Ableitungen von L.

(c) Berechnen Sie die (distributionelle) Fouriertransformation von x^2.

Aufgabe 2 (Freie Schrödingergleichung) [6* Punkte]

In dieser Aufgabe wollen wir die freie Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\partial_t \psi(x,t) = -\frac{1}{2}\Delta\psi(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},$$

lösen.

(a) Begründen Sie, dass für alle $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\psi(x,t) = \left(\mathcal{F}^{-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k^2}{2}t} \mathcal{F}\psi_0 \right)(x)$$

die Schrödingergleichung mit Anfangsbedingung $\psi(x,0) = \psi_0(x)$ löst.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion p_t, so dass für alle $t \neq 0$ gilt

$$\psi(x,t) = (p_t * \psi_0)(x).$$

HINWEIS: Zeigen Sie, dass $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\frac{k^2}{2} - \varepsilon\frac{k^2}{2}} \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\frac{k^2}{2}}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, d.h.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\frac{k^2}{2} - \varepsilon\frac{k^2}{2}} \varphi(k)\, \mathrm{d}k = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\frac{k^2}{2}} \varphi(k)\, \mathrm{d}k \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

und verwenden Sie Aufgabe 10.2. [ERGEBNIS: $p_t(x) = (2\pi\mathrm{i}t)^{-\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x^2}{2t}}$].

(c) Begründen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_0(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

HINWEIS: Plancherel-Identität.

(d) Beweisen Sie, dass für alle $t \neq 0$ gilt

$$|\psi(x,t)| \leq \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_0(y)| \, \mathrm{d}y.$$

Aufgabe 3 ([W] Euler'sche Differentialgleichungen) [5* Punkte]

Betrachten Sie die Differentialgleichung für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x^2 y''(x) + (2a+1)xy'(x) + by(x) = r(x) \tag{$\star$}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Ist y Lösung der Differentialgleichung für $x > 0$, so genügt die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := y(\mathrm{e}^t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}(t) + 2a\dot{\varphi}(t) + b\varphi(t) = r(\mathrm{e}^t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{$\star\star$}$$

(b) Sei φ_0 eine Lösung der Differentialgleichung ($\star\star$). Geben Sie sämtliche Lösungen φ der Differentialgleichung ($\star\star$) an. (Fallunterscheidung!)

(c) Bestimmen Sie den Lösungsraum $\mathcal{L}$ der Differentialgleichung ($\star$).

ALLGEMEINE HINWEISE ZUM ÜBUNGSBLATT:

- Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind in der Vorlesung am Donnerstag, dem **05.02.2020**, abzugeben. Die Übungsblätter können auch als **Kleingruppe (2-3 Personen)** abgegeben werden.
- Die **Prüfung zur Vorlesung** wird am **Freitag, 21.02.2020, von 10:00 bis 12:00 Uhr** im Theoretischen Hörsaal stattfinden. Genauere Informationen finden Sie auf dem Übungsaufgaben-Server unter Hinweise zur Klausur.
- Voraussichtlich am Mittwoch, 19.02.2020, wird es vormittags eine Fragestunde am Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften (Inselstraße 22, 04013 Leipzig) geben. Genauere Informationen dazu folgen nächste Woche.