Abgabe des Blattes in der Vorlesung am Dienstag, den 29.10.

Aufgabe 1: 3+3 Punkte

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbb{P}_a : a > 0)$ ein statistisches Modell, wobei $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})^{\otimes n}$ und $\mathbb{P}_a$ die folgende Dichte f_a bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $[0, +\infty)$ beträgt:

$$f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{1}{\theta}-1}}{\theta a^{1/\theta}} & \text{falls } 0 < x < a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\theta > 0$ ist eine bekannte Zahl, $a > 0$ ist unbekannt. Berechnen Sie $\mathbb{E}_a[M]$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}_a[M]$, wobei $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, und schlagen Sie einen erwartungstreuen Schätzer T für a vor. Berechnen Sie den systematischen Fehler $\mathbb{B}_\nu(T)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\nu(T)$ und den mittleren quadratischen Fehler $\mathbb{F}_\nu(T)$.

Aufgabe 2: 3 Punkte

Sei X_1 und X_2 zwei i.i.d. Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz beider folgenden Schätzern:

$$S = \frac{X_1 + X_2}{2}, \qquad T = \frac{aX_1 + bX_2}{a + b},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ sodass $a + b \neq 0$. Welcher Schätzer für μ würden Sie empfehlen? (wenn Sie T beantworten, für welche Werte von a und b?)

Aufgabe 3: 3 Punkte

Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe von n unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen, mit Varianz 1 und mit unbekannten Erwartungswert μ. Ist

$$M := \frac{\min(X_1, \ldots, X_n) + \max(X_1, \ldots, X_n)}{2}$$

ein guter Schätzer für μ? Um diese Frage zu beantworten, können Sie $\mathbb{E}_\mu[M]$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\mu[M]$ berechnen.

Aufgabe 4: 2+3+3 Punkte

Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe von n unabhängige Beobachtungen, wobei jede X_i die Verteilung $\mathbb{P}_p := p\mathcal{U}_{[0,a]} + (1-p)\mathcal{U}_{[0,b]}$ verfolgt, d. h. dass X_i mit Wahrscheinlichkeit p die Gleichverteilung auf $[0, a]$ verfolgt und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ die Gleichverteilung auf $[0, b]$ verfolgt. $0 < a < b$ sind bekannt. Man möchte p schätzen.

i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichtefunktion von X_1.

ii) Sei N_a die Zufallsvariable, die die Anzahl der Beobachtungen X_i im Intervall $[0, a]$ darstellt. Was ist die Verteilung von N_a? Erwartungswert und Varianz von N_a daraus schließen.

iii) Sei $\rho_p(x_1, \ldots, x_n)$ die Dichtefunktion von n unabhängige mit $\mathbb{P}_p$-verteilte Zufallsvariablen. Für welchen p ist $\rho_p(X_1, \ldots, X_n)$ maximal? (die Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$ steht hier fest.) Dieser p, der von $(X_1, \ldots, X_n)$ abhängt, heißt Maximum-Likelihood Schätzer.