

**Partielle Differentialgleichungen I**  
 Blatt 6 Lösungen

**Aufgabe 1**

Sei  $r > 0$  und sei  $u$  eine positive, harmonische Funktion in  $B_r(0)$ . Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson Formel die folgende explizite Version der Harnack-Ungleichung:

$$r^{n-2} \frac{r - |x|}{(r + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^{n-1}} u(0).$$

**Lösung:**

Die Poisson Formel gibt

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \int_{\partial B_r} \frac{u(y)}{|y - x|^n} dS(y).$$

Für  $y \in \partial B_r$  gilt  $|y - x| \geq r - |x|$  und wir kriegen deshalb mit der Mittelwerteigenschaft von  $u$ , dass

$$u(x) \leq r^{n-2} \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \frac{u(y)}{(r - |x|)^n} dS(y) = r^{n-2} \frac{r^2 - |x|^2}{(r - |x|)^n} \int_{\partial B_r} u dS = r^{n-2} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^{n-1}} u(0).$$

Für die zweite Ungleichung benutzen wir stattdessen  $|y - x| \leq r + |x|$  und schließen auf die gleiche Weise.

**Aufgabe 2**

Zeigen Sie, dass es eine nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $C > 0$  gibt, so dass

$$\max_{B_1} |u| \leq C \left( \max_{\partial B_1} |g| + \max_{B_1} |f| \right), \quad (1)$$

wenn  $u \in C^2(B_1) \cap C^0(\bar{B}_1)$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1 \\ u = g & \text{auf } \partial B_1 \end{cases}$$

ist.

**Lösung:**

Betrachte die Funktion

$$v(x) := u(x) - \frac{1}{2n} (1 - |x|^2) \max_{B_1} |f|.$$

Dann gilt für  $x \in B_1$ :

$$-\Delta v(x) = f - \max_{B_1} |f| \leq 0$$

und  $v$  ist subharmonisch. Es folgt demnach mit Hilfe des Maximumprinzips

$$u(x) \leq \max_{\partial B_1} v + \frac{1}{2n} (1 - |x|^2) \max_{B_1} |f| \leq \max_{\partial B_1} |g| + \frac{1}{2n} \max_{B_1} |f|.$$

Dasselbe Argument auf  $-u$  angewandt gibt die Abschätzung

$$-u(x) \leq \max_{\partial B_1} |g| + \frac{1}{2n} \max_{B_1} |f|$$

und somit auch die Behauptung mit  $C = 1$ .

### Aufgabe 3\*

Zeigen Sie, dass die Definition 29 äquivalent ist zur folgenden Definition. Eine Funktion  $u \in C(U)$  heisst *subharmonisch*, falls für jedes  $x \in U$  ein  $\delta_x > 0$  existiert, so dass

$$u(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u \, dS \quad \forall r < \delta_x. \quad (2)$$

### Lösung:

Die Bedingung (2) ist schwächer als Definition 29. Wir müssen also bloß zeigen, dass eine Funktion  $u \in C(U)$  mit (2) die Mittelwertungleichung für alle Bälle  $\bar{B}_r(x) \subset U$  erfüllt. Dazu bemerken wir zuerst, dass für eine solche Funktion das Maximumsprinzip gilt. Sei nämlich  $\bar{B}_r(x) \subset U$  und  $M := \max_{\bar{B}_r(x)} u$ . Die Menge

$$A := \{y \in B_r(x) : u(y) = M\}$$

ist relativ abgeschlossen in  $B_r(x)$ . Sei nun  $y \in A$  und  $\rho_0 < \min\{r - |x - y|, \delta_y\}$ . Per Voraussetzung gilt

$$M = u(y) \leq \int_{\partial B_{\rho_0}(y)} u \, dS \leq M.$$

Wir schließen, dass  $u \equiv M$  auf  $\partial B_{\rho_0}(y)$  für alle  $\rho \leq \rho_0$ . Somit ist  $B_{\rho_0}(y) \subset A$  und  $A$  ist auch relativ offen, also  $A = B_r(x)$  oder  $A = \emptyset$ . Deshalb folgt  $\max_{\bar{B}_r(x)} u = \max_{\partial B_r(x)} u$  für alle  $\bar{B}_r(x) \subset U$ . Sei nun  $\bar{B}_r(x) \subset U$  und  $h$  die Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta h = 0 & \text{in } B_r(x) \\ h = u & \text{auf } \partial B_r(x). \end{cases}$$

Wir bemerken, dass  $\tilde{u} = u - h$  die Bedingung (2) erfüllt. Demnach folgt mit der vorgehenden Bemerkung

$$u(x) = \tilde{u}(x) + h(x) \leq \max_{\partial B_r(x)} \tilde{u} + \int_{\partial B_r(x)} h \, dS = \int_{\partial B_r(x)} u \, dS,$$

wobei wir auch die Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktion  $h$  benutzt haben. Dies zeigt die Mittelwertungleichung von  $u$  für beliebige  $\bar{B}_r(x) \subset U$  und somit die Äquivalenz der Definitionen.

### Aufgabe 4\* (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)

Sei  $B_1^+$  der offene halbe Ball  $\{x \in B_1 : x_n > 0\}$  und sei  $u$  harmonisch in  $B_1^+$ . Zeigen Sie:

1. Falls  $u \in C(\overline{B_1^+})$  und  $u = 0$  auf  $\partial B_1^+ \cap \{x_n = 0\}$ , so ist

$$U(x) := \begin{cases} u(x) & \text{falls } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{falls } x_n < 0 \end{cases} \quad (3)$$

harmonisch in  $B_1$ .

2. Falls  $u \in C^1(\overline{B_1^+})$  und  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  auf  $\partial B_1^+ \cap \{x_n = 0\}$ , so ist

$$U(x) := \begin{cases} u(x) & \text{falls } x_n \geq 0 \\ u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{falls } x_n < 0 \end{cases} \quad (4)$$

harmonisch in  $B_1$ .

*Hinweis:* Sie können das Resultat von Aufgabe 3 benutzen.

**Lösung:**

Wir zeigen in beiden Fällen mit Hilfe von Aufgabe 3, dass sowohl  $U$  wie auch  $-U$  subharmonisch sind, woraus die Behauptung folgt.

1. Für  $x \in B_1$  mit  $x_n \neq 0$  gilt

$$\Delta U(x) = \begin{cases} \Delta u(x) & \text{falls } x_n > 0 \\ -\Delta u(\bar{x}) & \text{falls } x_n < 0 \end{cases}$$

wobei  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ . Also ist  $U$  harmonisch in  $B_1 \setminus \{x_n = 0\}$  und somit folgt aus der Mittelwerteigenschaft, dass die Eigenschaft (2) für  $x \in B_1 \setminus \{x_n = 0\}$  sowohl für  $U$  wie auch für  $-U$  mit  $\delta_x := 1 - |x|$  erfüllt ist. Sei nun  $x \in B_1 \cap \{x_n = 0\}$  und  $r < \delta_x := 1 - |x|$ . Mit der Variablentransformation  $\Phi(y) = \bar{y}$  folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(x)} U dS &= \int_{\partial B_r(x) \cap \{y_n > 0\}} U dS + \int_{\partial B_r(x) \cap \{y_n < 0\}} U dS \\ &= \int_{\partial B_r(x) \cap \{y_n > 0\}} u dS + \int_{\Phi(\partial B_r(x) \cap \{y_n > 0\})} -u(\bar{y}) dS(y) \\ &= \int_{\partial B_r(x) \cap \{y_n > 0\}} u dS - \int_{\partial B_r(x) \cap \{y_n > 0\}} u(\bar{\Phi}(y)) dS \\ &= \int_{\partial B_r(x) \cap \{y_n > 0\}} u dS - \int_{\partial B_r(x) \cap \{y_n > 0\}} u(y) dS = 0 = U(x). \end{aligned}$$

Damit ist sowohl  $U$  als auch  $-U$  in ganz  $B_1$  subharmonisch und aus der Vorlesung folgt, dass  $U$  harmonisch ist.

2. Für  $x \in B_1$  mit  $x_n \neq 0$  gilt wieder  $\Delta U(x) = \Delta u(x) = 0$  oder  $\Delta U(x) = \Delta u(\bar{x}) = 0$ . Die Annahme  $u \in C^1(\bar{B}_1^+)$  mit  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  auf  $B_1 \cap \{x_n = 0\}$  impliziert nun, dass  $U \in C^1(\bar{B}_1)$ . Tatsächlich müssen wir für diese Behauptung bloß die stetige Differenzierbarkeit von  $U$  auf  $B_1 \cap \{x_n = 0\}$  nachweisen. Für die partiellen Ableitungen nach  $x_i, i = 1, \dots, n-1$ , gilt

$$\partial_{x_i} U(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \partial_{x_i} u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0),$$

was per Voraussetzung stetig ist. Außerdem überzeugt man sich mit Hilfe von  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x', 0) = 0$ , dass

$$\partial_{x_n} U(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0.$$

Somit ist  $U \in C^1(\bar{B}_1)$ . Für  $x \in B_1 \cap \{x_n = 0\}$  und  $r < 1 - |x|$  betrachten wir nun die Funktion

$$f(r) = \int_{\partial B_r(x)} U dS$$

und wollen zeigen, dass  $f \equiv U(x)$ . Da  $U \in C^1(\bar{B}_1)$  gilt

$$\begin{aligned} n\omega_n r^{n-1} f'(r) &= \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial U}{\partial \nu} dS = \int_{\partial B_r(x) \cap \{x_n > 0\}} \frac{\partial U}{\partial \nu} dS + \int_{\partial B_r(x) \cap \{x_n < 0\}} \frac{\partial U}{\partial \nu} dS \\ &= \int_{\partial B_r(x) \cap \{x_n > 0\}} \frac{\partial U}{\partial \nu} dS - \int_{B_r(x) \cap \{x_n = 0\}} \partial_{x_n} U dS + \int_{B_r(x) \cap \{x_n = 0\}} \partial_{x_n} U dS \\ &\quad + \int_{\partial B_r(x) \cap \{x_n < 0\}} \frac{\partial U}{\partial \nu} dS \\ &= \int_{\partial(B_r(x) \cap \{x_n > 0\})} \frac{\partial U}{\partial \nu} dS + \int_{\partial(B_r(x) \cap \{x_n < 0\})} \frac{\partial U}{\partial \nu} dS \\ &= \int_{B_r(x) \cap \{x_n > 0\}} \Delta U dy + \int_{B_r(x) \cap \{x_n < 0\}} \Delta U dy = 0. \end{aligned}$$

Also ist  $f$  konstant mit  $f(r) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r) = U(x)$ , was den Beweis abschließt.

### Aufgabe 5\*

Seien  $H_1, H_2$  zwei Hyperebenen in  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i \cdot x = 0\}$  für  $v_i$  Einheitsvektoren. Sei  $u$  eine nicht konstante harmonische Funktion in  $B_1$  mit  $u(x) = 0$  für alle  $x \in H_1 \cup H_2$ . Welche Bedingung stellt dies an den Winkel zwischen den Hyperebenen?

#### Lösung:

OBdA sei  $v_1 = e_n$  und  $v_2 = (0, \dots, 0, -\sin \alpha, \cos \alpha)$  für ein  $\alpha \in [0, \pi]$ . Wir betrachten die Spiegelungen  $P_i(x) = x - \langle x, v_i \rangle v_i$  an  $H_i$ ,  $i = 1, 2$ . Wir bemerken, dass  $u$  die Voraussetzungen von Aufgabe 4 Teil 1 erfüllt. Wir können  $u$  also ungerade nach  $B_1^-$  und kriegen eine harmonische Funktion und haben schlussendlich zwei harmonische Funktionen  $u$  und  $U$  auf  $B_1$ , welche auf  $B_1^+$  übereinstimmen. Aus der Analytizität folgt dann, dass  $u = U$  auf ganz  $B_1$ . Insbesondere ist

$$u \circ P_1(x) = -u(x),$$

und dieselbe Argumentation führt auch zu  $u \circ P_2(x) = -u(x)$ . Setze  $R = P_2 \circ P_1$ . Dann gilt

$$u(R(x)) = -u(P_1(x)) = u(x),$$

und deshalb für alle  $k$  auch  $u(R^k(x)) = u(x)$ , wobei  $R^k = \underbrace{R \circ \dots \circ R}_{k\text{-mal}}$ . Nun ist aber  $R$  eine

Rotation um den Winkel  $2\alpha$ , explizit

$$R(x) = \begin{pmatrix} \text{Id}_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot x.$$

Wenn nun  $2\alpha \neq \frac{p}{q}2\pi$  für  $p, q \in \mathbb{N}$ , dann liegt der Orbit  $\{R^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  dicht und  $u$  ist dann konstant. Also muss  $\alpha$  ein rationales Vielfaches von  $\pi$  sein.