Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Dr. Jonas Hirsch
Dr. Dominik Inauen

WS2019/20

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 8 Lösungen

Aufgabe 1 (Bemerkungen zum Wärmeleitungskern)

Seien $g, \tilde{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt und setze $u(x,t) = (\Phi(\cdot,t) * g)(x)$, $\tilde{u}(x,t) = (\Phi(\cdot,t) * \tilde{g})(x)$. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Wärmeleitungskerns.

1. Falls $a \leq g(y) \leq b$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, so folgt $a \leq u(x,t) \leq b$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.
2. Falls $g \leq \tilde{g}$, so folgt $u \leq \tilde{u}$.
3. Falls $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt
$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy\,.$$
4. Die Wärmeleitungsgleichung hat 'unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit', d.h. falls $0 \leq g$ und $\operatorname{spt}(g) \subset B_1$, dann folgt
$$0 < (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{(|x|+1)^2}{4t}} \int_{B_1} g\,dy \leq u(x,t) \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{(|x|-1)^2}{4t}} \int_{B_1} g\,dy\,.$$
5. Es gilt $\Phi_t - \Delta\Phi = \delta_{(0,0)}$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Solution: Siehe Pdf "Bemerkungen zum Waermeleitungskern/ Aufgabe 1 Blatt 8".

Aufgabe 2

Finden Sie eine explizite Darstellungsformel für eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}\,; \end{cases} \tag{1}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$ beide beschränkt sind. Ist diese Lösung eindeutig?

Solution: Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems (1) und definiere $v(x,t) = e^{ct}u(x,t)$. Wir berechnen

$$v_t = e^{ct}(cu + u_t)\,, \Delta v = e^{ct}\Delta u\,.$$

Somit ist $v \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung von

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = \tilde{f} \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}\,; \end{cases} \tag{2}$$

wobei $\tilde{f}(x,t) = e^{ct}f(x,t)$. Eine Lösung von (2) ist aber durch

$$\tilde{v}(x,t) = (\Phi(\cdot,t) * g)(x) + \int_0^t \left(\Phi(\cdot,t-s) * \tilde{f}(\cdot,s)\right)(x)\,ds$$

gegeben. Setzen wir nun

$$u(x,t) = e^{-ct}\tilde{v}(x,t)\,,$$

dann ist u eine Lösung von (1) mit der expliziten Darstellung

$$u(x,t) = e^{-ct}\left(\left(\Phi(\cdot,t) * g\right)(x) + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{cs}\Phi(x-y,t-s) f(y,s)\, dy \right) ds \right).$$

Diese Lösung ist eindeutig in der Tychonov Klasse. Sei nämlich

$$|u(x,t)| \le A e^{a|x|^2}, \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T])$$

für Konstanten $A, a > 0$. Dann ist

$$|v(x,t)| \le e^{cT} A e^{a|x|^2} = \tilde{A} e^{a|x|^2}, \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T])$$

womit v eine Lösung des Cauchy Problems der Wärmeleitungsgleichung in der Tychonov Klasse ist und damit eindeutig.

Aufgabe 3*

[a] Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und C^1-regulär, $M > 0$. Wir definieren die Funktionenräume

$$\begin{aligned} \operatorname{Lip}(U) &:= \{u : U \to \mathbb{R} \colon u \text{ ist Lipschitz stetig auf } U \text{ mit Lipschitzkonstante } \operatorname{Lip}(u) < \infty\} \\ \operatorname{Lip}^M(U) &:= \{u \in \operatorname{Lip}(U) \colon \operatorname{Lip}(u) < M\}. \end{aligned}$$

Für ein $g \in \operatorname{Lip}(U)$ und $M > \operatorname{Lip}(g)$ definieren wir zudem

$$\begin{aligned} \operatorname{Lip}_g(U) &:= \{u \in \operatorname{Lip}(U) \colon u = g \text{ auf } \partial U\} \\ \operatorname{Lip}_g^M(U) &:= \{u \in \operatorname{Lip}(U) \colon \operatorname{Lip}(u) < M \text{ und } u = g \text{ auf } \partial U\}. \end{aligned}$$

Wir verwenden in dieser Aufgabe ohne Beweis das Theorem von Rademacher: *Sei $u \in \operatorname{Lip}^M(u)$. Dann ist u fast überall differenzierbar und $Du(x) \in L^\infty(U)$ mit $|Du|(x) \le \operatorname{Lip}(u) \le M$ für fast alle x.* Sie dürfen also in dieser Aufgabe mit Lipschitzfunktionen rechnen als wären sie C^1.

Für $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und konvex definieren wir das Funktional

$$I[u] := \int_U F(Du(x))\, dx.$$

1. Zeigen Sie, dass für jedes $A \in \mathbb{R}^n$ gilt[b]

   $$\int_U F(A)\, dx \le \int_U F(A + D\varphi)\, dx \quad \forall \varphi \in \operatorname{Lip}_0(U); \tag{3}$$

   d.h. die Funktion $u_A(x) = A \cdot x$ ist ein Minimierer des Funktionals $I(u)$ mit Randdaten $u_A(x)$ bzw.

   $$I[u_A] = \min_{v \in \operatorname{Lip}_{u_A}(U)} I[v].$$

   Hinweis: Benutzen Sie die Konvexität von F, d.h. $F(B) - F(A) \ge DF(A) \cdot (B - A)$.

2. Sei $g \in \operatorname{Lip}(U)$ und $M > \operatorname{Lip}(g)$. Zeigen Sie, dass ein $u \in \operatorname{Lip}_g(U)$ existiert, mit

   $$I[u] = \min_{v \in \operatorname{Lip}_g^M(U)} I[v]. \tag{4}$$

   Gehen Sie dazu wie folgt vor:

[a] Diese Aufgabe ist nicht direkt relevant für die Vorlesung und ist tendenziell eher schwerer. Sie ist auf Basis der Fragen in der Vorlesung konzipiert und gibt einen Einblick in das Themengebiet der Variationsrechnung. Versuchen Sie sich vielleicht zuerst an Punkt (4).

[b] Ein Funktional, welches für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (3) erfüllt, wird als quasikonvex bezeichnet. Die Eigenschaft (3) ist notwenig für die Unterhalbstetigkeit des Funktionals.

(a) Benutzen Sie das Theorem von Arzelà-Ascoli, um einen Grenzwert $u \in \mathrm{Lip}_g^M(U)$ einer Teilfolge einer Minimierungsfolge $\{u_n\}_n$ zu finden.

(b) Benutzen Sie die Konvexität von F, um zu zeigen, dass $I[u] \leq \liminf_{n\to\infty} I[u_n]$. *Sie können zur Vereinfachung annehmen, dass $DF(Du) \in C^1$.*

3. Sei u ein Minimierer wie in (2), der außerdem $\mathrm{Lip}(u) < M$ erfüllt. Zeigen Sie, dass u ein globaler Minimierer ist, d.h.

$$I[u] \leq \inf_{v\in Lip_g(U)} I[v]\,.$$

4. Berechnen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für einen Minimierer u wie in Punkt (2) unter der zusätzlichen Annahme, dass $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $u \in C^2(U)$ und $\|Du\|_\infty < M$.

Solution: 1. Sein $\varphi \in \mathrm{Lip}_0(U)$ und $A \in \mathbb{R}^n$. Da $DF(A)$ konstant ist, finden wir mit der Konvexität von F und dem Divergenztheorem

$$\begin{aligned}\int_U \left(F(A+D\varphi) - F(A)\right)\,dx &\geq \int_U DF(A)\cdot D\varphi\,dx = \int_U \mathrm{div}\left(\varphi DF(A)\right)\,dx \\ &= \int_{\partial U} \varphi DF(A)\cdot\nu\,dS = 0\,.\end{aligned}$$

2. Sei $\{u_n\} \subset \mathrm{Lip}_g^m(U)$ eine Folge mit

$$I[u_n] \to \inf_{v\in\mathrm{Lip}_g^m(U)} I[v]\,.$$

Da $\mathrm{Lip}(u_n) \leq M$ für alle n ist die Menge $\{u_n\}$ gleichgradig stetig und wir können den Satz von Arzelà–Ascoli anwenden und eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}$ finden, sodass $\{u_{n_k}\}$ auf $\bar{U}$ (da $u_{n_k} = g$ auf ∂U) gleichmässig gegen eine Lipschitzstetige Funktion u konvergiert. Beachte, dass $\mathrm{Lip}(u) \leq M$ und somit ist nicht klar, dass $u \in \mathrm{Lip}_g^M(U)$. Fixiere nun ein $k \in \mathbb{N}$ und wende die Konvexitätsungleichung von F auf $A = Du$ und $B = Du_{n_k}$ an. Mit der Annahme, dass $DF(Du) \in C^1$ findet man dann mithilfe des Theorems von Gauß, dass

$$\begin{aligned}\int_U F\left(Du_{n_k}\right)\,dx - \int_U F(Du)\,dx &\geq \int_U DF(Du)\cdot D\left(u_{n_k}-u\right)\,dx \\ &= \int_{\partial U} \underbrace{\left(u_{n_k}-u\right)}_{=g-g=0} DF(Du)\cdot\nu\,dS - \int_U \left(u_{n_k}-u\right) D\left(DF(Du)\right)\,dx\end{aligned}$$

Es folgt also

$$I[u] \leq \liminf_{k\to\infty} \left(I[u_{n_k}] + |U|\|u_{n_k}-u\|_{C^0(U)}\|DF(Du)\|_{C^1(U)}\right) = \liminf_{k\to\infty} I[u_{n_k}]\,.$$

Ohne die Annahme $DF(Du)$ approximiert man $DF(Du) \in L^\infty(U)$ durch eine C^1 Funktion und schätzt ab.

3. Sei $u \in \mathrm{Lip}_g^M(U)$ mit $I(u) = \min_{v\in\mathrm{Lip}_g^M(U)} I[v]$ und setze $\delta := M - \mathrm{Lip}(u) > 0$. Für $v \in \mathrm{Lip}_g(U)$ wähle $\lambda \in]0,1[$ so dass

$$\lambda(\mathrm{Lip}(v) + \mathrm{Lip}(u)) < \delta\,.$$

Für $v_\lambda := (1-\lambda)u + \lambda v$ gilt dann $\mathrm{Lip}(v_\lambda) < M$, d.h. wir haben $I[u] \leq I[v_\lambda]$.

Die Konvexität von F gibt nun aber

$$\lambda F(Dv) + (1-\lambda)F(Du) \geq F(Dv_\lambda)\,,$$

beziehungsweise

$$\lambda\left(F(Dv) - F(Du)\right) \geq F(Dv_\lambda) - F(Du)\,.$$

Integration in U liefert dann

$$\lambda\left(I[v] - I[u]\right) \geq I[v_\lambda] - I[u] \geq 0\,.$$

4. Sei $\varphi \in C_c^1(U)$. Dann ist $u + t\varphi \in \mathrm{Lip}_g^M(U)$ für alle $t < \delta_1$ mit

$$\delta_1 \leq \frac{M - \mathrm{Lip}(u)}{1 + \mathrm{Lip}(\varphi)} .$$

Insbesondere hat $i : [-\delta_1, \delta_1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $i(t) = I[u + t\varphi]$ ein Minimum im Ursprung, und deshalb gilt

$$0 = i'(0) = \int_U DF(Du) \cdot D\varphi \, dx = \int_{\partial U} \underbrace{\varphi}_{=0} DF(Du) \cdot \nu \, dS - \int_U \mathrm{div}\,(DF(Du))\, \varphi \, dx .$$

Da φ beliebig war und $F, u \in C^2$, folgt $\mathrm{div}(DF(Du)) = 0$. Das heisst, u ist eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,(DF(Du)) = 0 & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U . \end{cases}$$