Übungsblatt 6

1) a) Seien M und N Mengen mit N endlich. Zeigen Sie, falls es ein $f : M \to N$ injektiv gibt, dann ist ist M endlich und $\#(M) \leq \#(N)$ 2 Punkte

b) Beweisen Sie, dass es genau

$$\binom{m+p-1}{p-1}$$

Möglichkeiten gibt, m Münzen unter p Personen aufzuteilen! [*Hinweis: Interpretieren Sie hierzu die behauptete Anzahl im Sinne von Lemma 1.76 und konstruieren Sie dann eine geignete Bijektion.*] 8 Punkte

2) a) Eine reelle Zahl x heißt algebraisch, wenn es ein Polynom p mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, das x als Nullstelle hat. Das bedeutet: es gibt

$$n \in N, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ so dass } 0 = p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Beweisen Sie, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist, die meisten reellen Zahlen sind also nichtalgebraisch (werden dann als transzendent bezeichnet). 3 Punkte

b) Zeigen Sie die Menge $\mathcal{K}$ der konvergenten Folgen $(q_n)_{n=1}^{\infty}$, wobei $\forall n : q_n \in \mathbb{Q}$ ist überabzählbar. 2 Punkte

Hinweis: Sie können natürlich den Satz von Cantor benutzen. Ausserdem kann als bekannt vorausgesetzt werden, dass ein Polynom vom Grad n höchstens n verschiedene Nullstellen hat.

3) a) Sei

$$a_n = 1 + \frac{(1001/1000)^n - 1}{n^3} \text{ und } b_n = \frac{n^2}{(1002/1000)^n}.$$

Bestimmen Sie (gerne unter Verwendung eines Taschenrechners) a_n und b_n für $n = 1, 2, 5, 10, 100, 1000$. Was lässt sich daraus über das Verhalten von a_n und b_n für $n \to \infty$ ableiten?

b) Finden Sie für jede der nachstehenden Folgen (a_n) und jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ oder in $\mathbb{R}$ (nicht notwendigerweise das kleinste), so dass $|a_n| < \varepsilon$ wenn $n \geq N$:

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(\frac{1}{n(n-\sqrt{2})}\right)_{n=1}^{\infty}, \left((-1/2)^n\right)_{n=1}^{\infty}.$$

c) Untersuchen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent sind:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n-3}}\right)_{n=4}^{\infty}, \left(\frac{(n-3)^2}{(n+2)}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(\frac{n^2}{4^n}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

$1 + 3 + 3$ Punkte

4) Ist jede Umordnung einer konvergenten Folge auch konvergent? Falls ja, was können Sie über den Grenzwert der umgeordneten Folge sagen?

Hierbei nennen wir die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Umordnung der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wenn es eine Permutation σ der natürlichen Zahlen gibt, d.h. eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $b_n = a_{\sigma(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. 5 Punkte

Bemerkung: Die ursprüngliche Aufgabe 4) von diesem Zettel 6 wird auf Zettel 7 verschoben.

Abgabe: am 28.11.2019, 17.10 Uhr Hörsaal 9

Die (Übungsschein-)Klausur findet am 6.2.2020 von 17-19 Uhr statt.