Übungsblatt 1

1) Auf der Menge $M = \{-32767, -32766, \dots, -1, 0, 1, \dots, 32766, 32767\} \cup \{\text{NaN}\}$ erklären wir wie folgt die Addition $\oplus$ und die Multiplikation $\otimes$:

$$n \oplus m = \begin{cases} n+m & \text{falls } n \neq \text{NaN und } m \neq \text{NaN und } n+m \in M, \\ \text{NaN} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$n \otimes m = \begin{cases} n \cdot m & \text{falls } n \neq \text{NaN und } m \neq \text{NaN und } n \cdot m \in M, \\ \text{NaN} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche Körperaxiome erfüllt M mit diesen Rechenvorschriften? Begründen Sie Ihre Behauptung!
Erläuterung: M mit diesen Rechenvorschriften ist ein vereinfachtes Modell der ganzen (altertümlichen) Maschinenzahlen. NaN ist dabei der Überlauf (Not a Number), die Operationen $+, \cdot$ sind wohldefiniert da $M \setminus \{\text{NaN}\} \subset \mathbb{R}$. 5 Punkte

2) Auf der Menge $\mathbb{R}$ mit den üblichen Rechenoperationen "+" und "·" und den dazugehörigen neutralen Elementen 0 und 1 definieren wir folgende alternative Addition und Multiplikation

$$x \oplus y = x + y - 1 \text{ und } x \otimes y = x + y - xy \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass auch diese Operationen auf $\mathbb{R}$ die Körperaxiome erfüllen! 5* Punkte

3) Beweisen Sie unter alleiniger Benutzung der 9 Körperaxiome, dass
   a) wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $x + y = x$, dann $y = 0$ — d.h. das neutrale Element der Addition ist bereits dadurch charakterisiert, dass es ein einziges Element nicht ändert. Gilt das auch für die Multiplikation?
   b) wenn $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, dann gibt es genau ein $z \in \mathbb{R}$, so dass $xz = y$.
   c) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad (-x)(-y) = xy$.

6 Punkte

4) Sei $0 < a < b$. Beweisen Sie, dass

$$a < \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} < \sqrt{ab} < b.$$

Begründen Sie Ihre Beweisschritte sorgfältig! Sie können alle Umformungsregeln für Ungleichungen aus der Schule nutzen. 5 Punkte

Besprechung: Abgabe am 24.10.2019, 17.10 Uhr Hörsaal 3