

Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben
Serie 9

Hinweis

Bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie ferner an, an welchem Wochentag und zu welcher Uhrzeit Ihre Übung stattfindet. Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, 18.12.2019, 09:15 Uhr (als vor Beginn der Vorlesung) im Hörsaal 5 oder im Postfach von S. Hintze in der 5. Etage des Neuen Augusteums ab.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Menge $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Für alle $p, q \in P$ sei $p \circ q = z$ wobei z die größte Primzahl ist, die $(p + q - 2)$ teilt.

- a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel für die Operation \circ auf. Begründen Sie mit Hilfe der Tafel, dass \circ kommutativ ist und dass \circ eine innere Verknüpfung auf P ist. (2P)
- b) Begründen Sie, dass es ein neutrales Element in P bezüglich \circ gibt und dass jedes Element aus P ein inverses Element bezüglich \circ hat. (2P)
- c) Geben Sie ein geeignetes Beispiel an, welches zeigt, dass die Verknüpfung \circ nicht assoziativ ist. (1P)
- d) Begründen Sie mit einem von Teilaufgabe c) verschiedenen Argument, dass (P, \circ) keine Gruppe ist. (1P)

Aufgabe 2

Es sei $G = \{a, b, c, d, e\}$ eine Menge und $\circ : G \times G \rightarrow G$ eine innere Verknüpfung auf G . Die algebraische Struktur (G, \circ) ist eine abelsche Gruppe und zur Verknüpfung \circ gehört die folgende (unvollständig ausgefüllte) Verknüpfungstafel.

\circ	a	b	c	d	e
a	b	c			
b					
c					
d					
e	a				

- a) Geben Sie die vollständig gefüllte Tafel an. (1P)
- b) Begründen Sie, dass die Lösung von Teilaufgabe a) die einzige Lösung ist. (4P)

bitte wenden

Aufgabe 3

Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ sei

$$a * b = a + (b - 3).$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

(4P)

Aufgabe 4

Seien (G, \circ) eine Gruppe und $e \in G$ das neutrale Element dieser Gruppe. Ferner sei $a' \in G$ das inverse Element von $a \in G$ bezüglich \circ .

a) Zeigen Sie, dass $(b' \circ a') \in G$ das inverse Element von $(a \circ b) \in G$ ist. (2P)

b) Beweisen Sie die folgende Aussage.

Sei $a \in G$ beliebig. Wenn stets $a \circ a = e$ gilt, dann ist (G, \circ) eine abelsche Gruppe. (2P)

c) Beweisen Sie die folgende Aussage.

Seien $a, b \in G$ beliebig. Wenn stets $(a \circ b) \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ (b \circ b)$ gilt, dann ist (G, \circ) eine abelsche Gruppe. (2P)