Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben
Serie 11

Hinweis

Bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie ferner an, an welchem Wochentag und zu welcher Uhrzeit Ihre Übung stattfindet. Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, 15.01.2020, 09:15 Uhr (als vor Beginn der Vorlesung) im Hörsaal 5 oder im Postfach von S. Hintze in der 5. Etage des Neuen Augusteums ab.

Aufgabe 1

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a, b \neq 0$. Zeigen Sie, dass die unten stehenden Aussagen wahr sind.

a) Für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt: $ggT(a, b) = ggT(a, b + a \cdot m)$. (2P)

b) Es sei $c \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $a|c$ und $b|c$ gilt. Wenn a und b teilerfremd zueinander sind, dann gilt $(a \cdot b)|c$. (2P)

c) Sei $z \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass sowohl a und z als auch b und z teilerfremd zueinander sind. Dann sind auch $a \cdot b$ und z teilerfremd zueinander. (2P)

Aufgabe 2

Gegeben seien die Zahlen 1001 und 101.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler dieser beiden Zahlen und stellen Sie diesen mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus als Linearkombination der beiden Zahlen dar. (3P)

b) Vor Ihnen stehen eine Balkenwaage und beliebig viele Gewichte von 1001 Gramm und 101 Gramm. Begründen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe a), dass Sie damit jedes Gewicht von n Gramm ($n \in \mathbb{N}$) abwiegen können, wenn Sie in beide Waagschalen Gewichte legen dürfen. (1P)

bitte wenden

Aufgabe 3

Zwei ungerade Zahlen, deren Differenz 2 ist, werden in der folgenden Aufgabe als aufeinanderfolgende ungerade Zahlen bezeichnet. So sind beispielsweise 11 und 13 zwei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen. Bei der Betrachtung von verschiedenen aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen stellt Kurt fest, dass diese teilerfremd sind.

a) Geben Sie für die beiden Zahlen 9 und 11 und für die beiden Zahlen 11 und 13 jeweils zwei verschiedene Linearkombinationen an, deren Wert 1 ist. (2P)

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Geben Sie eine Linearkombination von $2k-1$ und $2k+1$ an, deren Wert 1 ist. Weisen Sie nach, dass die Linearkombination den Wert 1 hat. (2P)

c) Begründen Sie ohne Verweis auf eine Linearkombination, dass zwei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen stets teilerfremd sind. (1P)

Aufgabe 4

Im Rahmen einer Mathematikolypmiade wurde folgende Aufgabe gestellt.

> Zeigen Sie, dass der Bruch
> $$\frac{21n+4}{14n+3}$$
> für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht weiter gekürzt werden kann.

a) Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe des euklidischen Algorithmus. (2P)

Um diese Aufgabe zu lösen, sucht Kurt $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass

$$(21n+4) \cdot x + (14n+3) \cdot y = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Diese Gleichung formt Kurt in

$$(21x+14y) \cdot n + (4x+3y) = 1$$

um und er erstellt daraus das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 21x + 14y &= 0 \\ 4x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

Dieses will er nun lösen.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem und begründen Sie, dass dadurch ebenfalls die ursprüngliche Aufgabe gelöst wurde. (2P)