Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Dr. Jonas Hirsch
Dr. Dominik Inauen

WS2019/20

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 1

Aufgabe 1

Seien $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Beweisen Sie die folgende *Leibniz-Formel*

$$D^\alpha (uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u \, D^{\alpha-\beta} v \,, \tag{1}$$

wobei $\beta \leq \alpha$ für ein Multiindex $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ genau dann, wenn $\beta_i \leq \alpha_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Zur Erinnerung: Für einen Multiindex α definiert man $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$ und

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \,.$$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Beweisen Sie, dass

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha + O\left(|x|^{k+1}\right) \qquad \text{für } x \to 0 \tag{2}$$

für alle $k = 1, 2, \dots$.

Tipp: Fixieren Sie $x \in \mathbb{R}^n$ und benützen Sie die Taylorformel für die Funktion einer Variablen $g(t) := f(tx)$.

Aufgabe 3

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $u \in C^2(U)$ mit

$$0 = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \,.$$

Zeigen Sie, dass $u \in C^\infty(U)$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y} : U \to \mathbb{R}$ die Cauchy–Riemann Gleichungen erfüllen.

(ii) Identifizieren Sie $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ und schließen Sie mit Hilfe von (i), dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z)$$

eine Stammfunktion F besitzt.

(iii) Schlussfolgern Sie die Behauptung.