

Übungsblatt (überarbeitet)

Abgabe: Dienstag, 5.11.19, 11:15 Uhr, Hörsaal 10

**Jede Abgabe ist in der Kopfzeile des Deckblatts mit
Name, Vorname, Matrikelnummer, Lehrkraft, Buchstabe der Übungsgruppe
zu versehen.**

Alle Lösungen sind sorgfältig zu begründen bzw. zu beweisen!

Aufgabe 1 (1+1+1+2 Punkte)

Wir definieren den *Betrag* einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ gemäß

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x| = \max \{x, -x\}$ und $|x| \geq 0$.
- (b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- (c) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- (d) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte + 1 Zusatzpunkt für 4.)

Finden Sie Folgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

so dass die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n=0}^{\infty}$:

- (a) gegen ein $c \in \mathbb{R}$ konvergiert.

- (b) bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.
- (c) bestimmt gegen $-\infty$ divergiert.
- (d) beschränkt, aber nicht konvergent ist.

Im Folgenden setzen wir die Gültigkeit des unten angegebenen Satzes voraus und üben dessen Anwendung:

Satz 1. (Quetschlemma, Sandwichlemma, Lemma von den zwei Polizisten, Vergleichskriterium, Einschnürrungssatz)

Es seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ reelle Folgen derart, dass ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$b_n \leq a_n \leq c_n, \quad \forall n \geq N.$$

Konvergieren die Folgen $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen den Wert $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Gegeben seien die reellen Folgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$:

- (a) $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$.
- (b) $a_n = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 + n}$, $n \geq 1$.
- (c) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$, $n \geq 0$.
- (d) $a_n = \frac{n^3 - n + 22}{n^5 + 3n^4 + 5n}$, $n \geq 1$.

Stellen Sie für den Grenzwert von $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Vermutung auf und beweisen Sie Ihre Vermutung unter Verwendung von Satz 1.