Übungsblatt zu der Vorlesung "Simpliziale Komplexe", Serie B

Leipzig, den 18.12.2019

5.) Wir betrachten das "konvexe Haus" H, das die konvexe Hülle der Menge aller Punkte $A_1, ..., A_{10}$ ist, die gegeben sind durch:

$$A_1 := (0,0,0), A_2 := (6,0,0), A_3 := (0,4,0), A_4 := (6,4,0),$$
$$A_5 := (0,0,4), A_6 := (6,0,4), A_7 := (0,4,4), A_8 := (6,4,4),$$
$$A_9 := (0,2,8), A_{10} := (6,2,8).$$

Bestimmen Sie – nicht unbedingt mit genauer Begründung – alle Seiten von H sowie von all diesen Seiten die Schwerpunkte.
Wie viele maximale Simplizes besitzt die zugehörige Simpliziale Zerlegung von H ?

6i) Beweisen Sie mit den ab den Konventionen 2.38 getroffenen Vereinbarungen, dass die Abbildung, die jeder Fahne $\mathcal{F}$ von nichtleeren Seiten eines gegebenen Polytops P die konvexe Hülle $P_{\mathcal{F}} = conv(S_{\mathcal{F}})$ zuordnet, ein Isomorphismus zwischen dem Fahnenkomplex der nichtleeren Seiten und dem Simplizialen Komplex $\Delta(P)$ ist.

ii) Zeigen Sie, dass $\Delta(P)$ ein quasi-dünner Kammernkomplex ist.
Welche Wände von $\Delta(P)$ sind in nur einer Kammer enthalten ?

iii) Erörtern Sie speziell für n-dimensionale Simplizes in $\mathbb{R}^n$ den Zusammenhang zu A_n aus Beispiel 1.24 – und für das n-dimensionale Kreuzpolytop P_n in (1.14) sowie den Würfel $W_n := [-1,1]^n$ den Zusammenhang zu C_n aus Beispiel 1.25.

iv) Zeigen Sie, dass C_n ein Coxeter-Komplex ist.

Hinweise: Sie können die Sätze 2.34 und 2.35 benutzen – und die daraus resultierende Tatsache, dass jede Seite A von P mit $dim(A) = dim(P) - 2$ in genau zwei Facetten von P enthalten ist.

7.) Beweisen Sie für einen Coxeter-Komplex Σ die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(I) Σ ist – als Menge – endlich.

(II) Die Menge $\mathcal{C}_\Sigma$ der Kammern in Σ ist endlich.

(III) Der *Durchmesser* $diam\Sigma := sup\{d(C,D) \,|\, C, D \in \mathcal{C}_\Sigma\}$ von Σ ist endlich.

8.) Es sei Σ ein Coxeter-Komplex.

i) Es sei $\Gamma = (C_0, ..., C_m)$ eine echte Galerie in Γ mit $C_0 = C_m$; das heißt, Γ ist geschlossen. Beweisen Sie, dass m gerade ist.

ii) Zeigen Sie: Sind C, D Kammern in Σ, für die eine Faltung $\pi : \Sigma \to \Sigma$ existiert mit $\pi(C) = D \neq C$, so ist $d(C,D)$ ungerade.

iii) Gibt es umgekehrt zu je zwei Kammern $C, D \in \Sigma$ mit ungeradem Abstand $d(C,D)$ immer eine Faltung π mit $\pi(C) = D$?