

## 1. REELLE ZAHLEN

Für die Konstruktion der reellen Zahlen siehe W.Rudins Buch "Analysis", wir setzen die Existenz voraus. Dann sind die reellen Zahlen eine Menge  $\mathbb{R}$  mit

- zwei Rechenoperationen die jedem Paar  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  zweier reeller Zahlen ein Element  $x + y \in \mathbb{R}$  bzw.  $x \cdot y \in \mathbb{R}$  zuordnen, und
- einer Ordnungs- (oder Vergleichsrelation)  $<$

so dass die im Folgenden allmählich diskutierten 13 Axiome gelten.

### I. Körperaxiome

betreffen nur die Rechenoperationen (siehe auch Kapitel 2 im Buch Otto Forster, Analysis 1, Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, elektronische CampusLizenz an der Uni Leipzig)

| Addition |   | Multiplikation |   |   |
|----------|---|----------------|---|---|
| (AA)     | $(x + y) + z = x + (y + z)$                                     | (MA)           | $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$   | $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$<br>Assoziativgesetz  |
| (AK)     | $x + y = y + x$   | (MK)           | $x \cdot y = y \cdot x$   | $\forall x, y \in \mathbb{R}$<br>Kommutativgesetz     |
| (AN)     | $\exists 0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : 0 + x = x$ | (MN)           | $\exists 1 \in \mathbb{R} : (1 \neq 0 \ \& \ \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x)$   | neutrales Element                                     |
| (AI)     | $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$ | (MI)           | $\forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq 0 \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$ | inverses Element                                      |
| (DG)     | $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$                   |                |   | $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$<br>Distributivgesetz |

**Bemerkung 1.1.** Neutrale Elemente in (AN),(MN) sind eindeutig, dies macht die rechten Seiten in (AI),(MI) wohldefiniert. Das neutrale Element der Addition wird als Null bezeichnet, das neutrale Element der Multiplikation als Eins.

**Bemerkung 1.2.** Inverse Elemente in (AI),(MI) sind eindeutig für gegebenes  $x$ , wir schreiben  $-x$  bzw.  $x^{-1}$  für additives bzw. multiplikatives Inverses.

**Bemerkung 1.3.** Die 9 Körperaxiome charakterisieren  $\mathbb{R}$  noch nicht, es gibt andere (noch zu diskutierende) Körper, welche diese ebenfalls erfüllen. Siehe, zB. Beispiel 1.10. Ein ganz trivialer Körper ist  $\{0\}$  mit den Operationen  $0 + 0 = 0 = 0 \cdot 0$ . Um dieses Beispiel auszuschliessen, fordern wir im Folgenden **immer**  $0 \neq 1$ .

**Satz 1.4.** *Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen*

- a)  $\forall x, y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} : x + z = y$ . Dieses  $z$  ist eindeutig und durch  $z = y + (-x)$  gegeben.

- b)  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0 \exists z \in \mathbb{R} : xz = y$  Dieses  $z$  ist eindeutig und durch  $z = y(x^{-1})$  gegeben.

Wir schreiben  $z = y - x$  für die Lösung in a) und  $z = y/x$  für die Lösung in b).

**Satz 1.5.**  $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$ .

**Korollar 1.6.**  $\forall x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = -x$ .

**Satz 1.7.**  $\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ oder } y = 0)$ .

**Lemma 1.8.**

- a)  $\forall x \in \mathbb{R} : -(-x) = x$   
 b)  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0 : (x^{-1} \neq 0 \ \& \ (x^{-1})^{-1} = x)$

**Beispiel 1.9.**  $z^2 = 1 \Leftrightarrow (z = 1 \text{ oder } z = -1)$ .

**Beispiel 1.10.** Ein endlicher Körper

$GF(3) = \{0, 1, 2\}$  mit folgenden Rechenregeln ("Restklassen modulo 3" - für Experten).

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| + | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| · | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

also  $2^{-1} = 2$  und  $2 = -1$  hier.

Die Überprüfung der neun Körperaxiome von hand ist möglich aber mühsam. (Einfacher gestaltet sich dies z.B. für  $GF(2) = \{0, 1\}$  mit entsprechenden Rechenregeln, von denen nur  $1 + 1 = 0$  nicht unmittelbar aus (AN), (MN) oder Satz 1.5 folgt). Es zeigt sich, dass für jede Primzahl  $p$  ein Körper  $GF(p)$  mit  $p$  Elementen existiert, und die Gültigkeit der Körperaxiome (AA), (MA), (AK), (MK), (AN), (MN) und (DG) folgt leicht aus ähnlichen Aussagen für die natürlichen Zahlen ohne lästiges Probieren aller Einzelfälle.)

**Bemerkung 1.11.** In den bisherigen Beweisen ließen sich die Schlussfolgerungen jeweils leicht aus den Axiomen herleiten. Wir brauchten noch keine feineren Methoden wie z.B. den indirekten Beweis (Widerspruchsbeweis). Dies wird sich im Folgenden ändern.

Die bisher definierte Körperaxiome ermöglichen Rechnen mit Gleichungen, für das Rechnen mit Ungleichungen brauchen wir den Begriff der (An)Ordnung. (vergleiche Kapitel 3 in O.Forsters Buch) Primär muss man festlegen, welche Zahlen "positiv", d.h.größer als Null sind. Diese Zahlen müssen dann die im Folgenden angeführten Eigenschaften haben:

## II. Anordnungsaxiome

Es gibt eine Menge  $\mathbb{P}$  von reellen Zahlen (d.h.  $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$ ), so dass

(O.1)  $\forall x \in \mathbb{R}$  gilt *genau* eine der Aussagen:  $x \in \mathbb{P}, x = 0, -x \in \mathbb{P}$  "Trichotomie"

(O.2) Wenn  $x \in \mathbb{P}$  &  $y \in \mathbb{P}$  dann  $x + y \in \mathbb{P}$  "Abgeschlossenheit bezüglich Addition"

(O.3) Wenn  $x \in \mathbb{P}$  &  $y \in \mathbb{P}$  dann  $xy \in \mathbb{P}$  "Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation"

**Definition 1.12.** Wir sagen

$0 < x$  (d.h.  $x$  ist *positiv*) gdw.  $x \in \mathbb{P}$ ;  $0 > x$  (d.h.  $x$  ist *negativ*) gdw.  $-x \in \mathbb{P}$   
 $x < y$  (d.h.  $y$  größer  $x$ ) gdw.  $0 < y - x$ ;  $x > y$  (d.h.  $y$  kleiner  $x$ ) gdw.  $0 > y - x$   
 $x \leq y$  gdw. ( $x < y$  oder  $x = y$ );  $x \geq y$  gdw. ( $x > y$  oder  $x = y$ )

**Bemerkung 1.13.** a) jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist *positiv, negativ oder null*

b) nach Satz 1.4 gilt  $x = y \Leftrightarrow 0 = y - x$ , also  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y$  oder  $x > y$  oder  $x = y$

c)  $x < y \Leftrightarrow -(x - y) = y - x \in \mathbb{P} \Leftrightarrow 0 > x - y \Leftrightarrow y > x$ , also  $y$  grösser  $x$  genau dann wenn  $x$  kleiner  $y$

d)  $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{P}_0 = \mathbb{P} \cup \{0\}$  nichtnegativ

**Satz 1.14.** Transitivität der Ordnung  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x < y \ \& \ y < z) \Rightarrow x < z$

**Bemerkung 1.15.** ( $x \leq y \ \& \ y \leq z$ )  $\Rightarrow x \leq z$ , mit  $x < z$  falls zudem  $x < y$  oder  $y < z$

**Lemma 1.16.** Translationsinvarianz  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

**Lemma 1.17.**  $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R} : (x < y \ \& \ u < v) \Rightarrow x + u < y + v$

**Proposition 1.18.** Spiegelung  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Leftrightarrow -y < -x$

**Lemma 1.19.**  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$  mit  $x < y : (0 < z \Rightarrow zx < zy), (0 > z \Rightarrow zx > zy)$

**Korollar 1.20.**  $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R} : (0 \leq x < y \ \& \ 0 \leq u < v) \Rightarrow xu < yv$

**Satz 1.21.**  $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \Rightarrow 0 < x \cdot x = x^2$

**Korollar 1.22.**  $0 < 1$

Obwohl  $1 > 0$  und auch die etwas allgemeinere Ungleichung  $0 < x^2, x \neq 0$  sehr natürlich erscheinen, sind sie zentral für die weitere Entwicklung der Analysis! Weil in  $\text{GF}(3)$ , siehe Beispiel 1.10,  $1 + 1 + 1 = 0$  kann in diesem Körper keine geeignete Menge  $\mathbb{P}$  "positiver" Elemente gefunden werden.

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass umgekehrt jede positive reelle Zahl auch das Quadrat einer reellen Zahl ist. Dies wird noch ein weiteres (letztes) Axiom brauchen.

**Proposition 1.23.**  $\forall x, y \in \mathbb{R} :$

a)  $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$

b)  $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$  ("Spiegelung an der 1")

**Beweis:**

a) Wenn  $x > 0$ , dann  $x \neq 0$  und  $x^{-1} \neq 0$  (Lemma 1.8.b)). Somit  $0 < x^{-1}x^{-1}$  wegen Satz 1.20. Wegen  $x > 0$  zeigt Lemma 1.19, dass

$$0 = x \cdot 0 < x(x^{-1} \cdot x^{-1}) = (x \cdot x^{-1})x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}.$$

Umgekehrt, da  $(x^{-1})^{-1} = x$  folgt aus dem gerade Gezeigten die Umkehrimplikation.

b) Da  $0 < x, y$  gilt  $0 < x^{-1}, y^{-1}$  und also  $0 < x^{-1}y^{-1}$ . Nun nutzen wir wieder Lemma 1.19, um

$$0 = 0(x^{-1}y^{-1}) < y^{-1} = x(x^{-1}y^{-1}) < x^{-1} = y(x^{-1}y^{-1})$$

zu folgern.

**Beispiel 1.24.** Sei  $0 < x < y$  und möge  $\sqrt{xy}$  existieren (dh. positive Zahl, deren Quadrat  $xy$  ist). Dann gilt die AG-Ungleichung (zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)

$$y > \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} > x.$$

**Beispiel 1.25.** Wenn  $x, y \in \mathbb{R}$ , dann folgt aus  $x^2 + y^2 = 0$ , dass  $x = y = 0$ .

### Absolutbetrag, Maximum und Minimum

**Definition 1.26.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ , wir definieren den Betrag von  $x$  als

$$|x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

**Bemerkung 1.27.** i) wichtige geometrische Bedeutung:  $|x - y|$  Abstand von  $x$  zu  $y$   
 ii) aus der Definition (mit Fallunterscheidung  $x >, =, < 0$ ) folgt leicht  
 $x \leq |x| = |-x|$ ,  $|x| \geq 0$  mit "=" gdw.  $x = 0$

**Lemma 1.28.** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

- a)  $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$  (und dann  $y \geq 0$ ),
- b) Sei  $\sigma \in \{-1, 1\}$  dann  $\sigma x \leq |x|$ , und falls  $x \geq 0$  dann  $|\sigma x| = x$ .

**Beweis:** a) Wenn  $-y \leq x \leq y$  dann  $x \leq y$  und  $-x \leq y$ . Da  $|x| \in \{x, -x\}$ , folgt  $|x| \leq y$ . Umgekehrt, wenn  $|x| \leq y$  dann entweder  $x \geq 0$  und somit  $y \geq |x| = x \geq 0 \geq -y$  oder  $x < 0$  und also  $y \geq |x| = -x \geq 0 \geq -y$  impliziert nach Prop. 1.18  $-y \leq -(-x) = x \leq y$ .

**Definition 1.29.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ , wir definieren das Signum (entspricht Vorzeichen) von  $x$  als

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ -1 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

**Bemerkung 1.30.**  $\operatorname{sgn}(0)$  wird im Allgemeinen und in dieser VL als 1 definiert, auch  $-1$  ist möglich und ebenfalls  $\operatorname{sgn}(0) = 0$  wird gelegentlich in der Literatur verwendet. In jedem Falle gilt, wie der zweite Punkt in 1.27 zeigt

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \operatorname{sgn}(x) \cdot x \text{ und } x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|.$$

Dies hilft, lästige FUs einzusparen.

**Satz 1.31.** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$

- a)  $|xy| = |x||y|$  Multiplikativität
- b)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  Dreiecks-Ungleichung!

**Definition 1.32.** Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  gegeben, wir definieren dann

$$\min(x, y) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \leq y \\ y & \text{wenn } x > y \end{cases}, \text{ und } \max(x, y) = \begin{cases} y & \text{wenn } x \leq y \\ x & \text{wenn } x > y \end{cases}.$$

**Lemma 1.33.** Für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\max(x, y) = \frac{x + y}{2} + \frac{|x - y|}{2}.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Formel ist klar: gehe von der Mitte  $\frac{x+y}{2}$  zwischen zwei Zahlen  $x, y$  den halben Abstand  $\frac{|x-y|}{2}$  der beiden Zahlen in positive Richtung und gelange zur grösseren der beiden Zahlen. Es gilt die analoge Formel für  $\min(x, y)$ .

Mittels  $\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z))$  usw. ist Maximum und analog Minimum für beliebige "endliche" (noch zu definieren!) Mengen reeller Zahlen definiert. Diese größten und kleinsten Elemente einer Menge existieren nicht mehr, wenn wir, wie im Folgenden, allgemeine unendliche Mengen betrachten.

**Beispiel 1.34.**  $M = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  hat kein Minimum.

**Definition 1.35.** Sei  $M \subset \mathbb{R}$  beliebig

- a)  $s \in \mathbb{R}$  ist  $\max M$ , das Maximum der Menge  $M$ , wenn  $s \in M$  und  $\forall x \in M : x \leq s$ .  
 $s \in \mathbb{R}$  ist  $\min M$ , das Minimum der Menge  $M$ , wenn  $s \in M$  und  $\forall x \in M : x \geq s$
- b)  $s \in \mathbb{R}$  ist obere Schranke (**OS**) für  $M$  wenn  $\forall x \in M : x \leq s$ ,  $s \in \mathbb{R}$  ist untere Schranke (**US**) für  $M$  wenn  $\forall x \in M : x \geq s$ 
  - $s \in \mathbb{R}$  ist **Supremum** von  $M$  ( $s = \sup M$ ) wenn  $s$  die kleinste aller oberen Schranken von  $M$  ist, d.h.

$$(\forall x \in M : x \leq s) \ \& \ (\forall t \text{ OS von } M : t \geq s).$$

- $s \in \mathbb{R}$  ist **Infimum** von  $M$  ( $s = \inf M$ ) wenn  $s$  die größte aller unteren Schranken von  $M$  ist, d.h.

$$(\forall x \in M : x \geq s) \ \& \ (\forall t \text{ US von } M : t \leq s).$$

- $M$  ist von oben (bzw. unten) beschränkt wenn es eine obere (bzw. untere Schranke) für  $M$  gibt.  $M$  beschränkt wenn von unten und oben beschränkt.

**Beispiel 1.34.** (Fortsetzung)  $M = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$  hat keine OS,  $s$  ist US gdw.  $s \leq 0$ , also  $\inf M = 0$  aber  $\sup M$  existiert nicht.

Die Existenz von  $\inf$  und  $\sup$  wann immer es entsprechende Schranken gibt, gilt nicht nur für so einfache Mengen wie dieses  $M$  (Intervall), sondern im Allgemeinen. Das unterscheidet  $\mathbb{R}$  von anderen Körpern und ist formuliert im letzten noch benötigten

### III. Vollständigkeitsaxiom

(VA) Für jede nichtleere und von oben beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  existiert das Supremum  $\sup M$ .

**Lemma 1.36.** Sei  $M$  eine Menge reeller Zahlen, dann  $(\exists \max M \Leftrightarrow \sup M \in M)$

**Proposition 1.37.** Sei  $M \subset \mathbb{R}$  nichtleer und von oben beschränkt,  $t \in \mathbb{R}$ . Dann

- a)  $t \geq \sup M \Leftrightarrow \forall m \in M : m \leq t$

$$\text{b) } t = \sup M \Leftrightarrow (\forall m \in M : m \leq t \ \& \ \forall s < t \exists m \in M : s < m)$$

APPROXIMATIONSPRINZIP

**Lemma 1.38.** *Seien  $M, N \subset \mathbb{R}$  nichtleer und von oben beschränkt. Dann*

- a)  $\inf(-M) = -\sup M$ ,
- b)  $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$ ,

wobei  $-M = \{-m : m \in M\}$  ist die "Spiegelung" von  $M$ , und  $M + N = \{m + n : m \in M \ \& \ n \in N\}$ .

**Satz 1.39.**  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$  existiert eindeutiges  $s > 0$  so dass  $s^2 = x$ .

Wir schreiben für diese Zahl  $s = \sqrt{x}$  Wurzel von  $x$ .

## Zahlbereiche

Nachdem wir alle grundlegenden Axiome für  $\mathbb{R}$  eingeführt und erste Anwendungen gesehen haben, brauchen wir noch wichtige Teilmengen von  $\mathbb{R}$  – wie die natürlichen, die ganzen und die rationalen Zahlen.

**Definition 1.40.**  $M \subset \mathbb{R}$  ist induktiv wenn  $1 \in M$  und  $\forall n \in \mathbb{R} : n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

**Satz 1.41.** Es gibt eine kleinste induktive Menge, dh. sie ist Teilmenge jeder induktiven Menge.

Diese kleinste induktive Menge ist eindeutig, wird mit  $\mathbb{N}$  bezeichnet, ihre Elemente werden natürliche Zahlen genannt.

**Korollar 1.42.** (Schwaches) Induktionsprinzip:  $M$  induktiv  $\Rightarrow \mathbb{N} \subset M$ . Also wenn  $P$  mathematische Aussage so dass:  $P(1)$  wahr und  $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$  wahr  $\Rightarrow P(n + 1)$  wahr, dann gilt  $P(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Bemerkung  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ , dann  $0 \in M$  und  $(n \in M \Rightarrow n + 1 \in M)$  impliziert  $\mathbb{N}_0 \subset M$ , da  $M$  induktiv und also  $\mathbb{N} \subset M$ , Also wenn  $P$  mathematische Aussage, so dass:  $P(0)$  und  $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ , dann gilt  $P(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Definition 1.43.** Summen- und Produktsymbol Für  $n, m, k \in \mathbb{N}_0$  setzen wir

$$\sum_{k=n}^{n-1} a_k = 0 \text{ (leere Summe)}, \forall m \geq n - 1 : \sum_{k=n}^{m+1} a_k = \left( \sum_{k=n}^m a_k \right) + a_{m+1}$$

$$\prod_{k=n}^{n-1} a_k = 1 \text{ (leeres Produkt)}, \forall m \geq n - 1 : \prod_{k=n}^{m+1} a_k = \left( \prod_{k=n}^m a_k \right) \cdot a_{m+1}$$

$$a^n = \prod_{k=1}^n a, \text{ Potenz } (a^0 = 1 \text{ wenn } a \neq 0), n! = \prod_{k=1}^n k, \text{ Fakultät } (0! = 1)$$

**Satz 1.44.** Bernoullische Ungleichung:  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq -1 : (1 + x)^n \geq 1 + nx$ .  
Überdies gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \text{ wenn } n \geq 2 (= 1 + 1) \text{ und } (x \geq -1 \ \& \ x \neq 0) \text{ dann } (1 + x)^n > 1 + nx.$$

**Proposition 1.45.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Dann  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$ .

**Definition 1.46.** Für  $n, k \in \mathbb{N}_0$  ist der Binominalkoeffizient definiert durch

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left( = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \right) & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{wenn } k > n. \end{cases}$$

$$\text{z.B. } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

**Lemma 1.47.**

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall k \in \mathbb{N} : \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

**Satz 1.48.** Binomialsatz *Mit der Vereinbarung  $0^0 = 1$  gilt*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}_0 : (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Obwohl wir  $\mathbb{N}$  über die Eigenschaft induktive Menge definiert haben, erlaubt es als Zahlenbereich die Rechenoperationen, wie aus der Elementarmathematik gewohnt, auszuführen.

**Lemma 1.49.**

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N} \ \& \ n \cdot m \in \mathbb{N}.$$

**Lemma 1.50.**

$$\forall n \in \mathbb{N} : n = 1 \text{ oder } (n > 1 \ \& \ n - 1 \in \mathbb{N}).$$

**Satz 1.51.**

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n \leq m \text{ oder } n - m \in \mathbb{N}.$$

Wir haben damit gezeigt:  $n < m$  in  $\mathbb{N} \Rightarrow n \leq m - 1$ .

**Definition 1.52.**  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$  sind die ganzen Zahlen.

Es gilt  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N} = \{n - m : n, m \in \mathbb{N}\}$ .

**Korollar 1.53.**  $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x + y, x - y, x \cdot y \in \mathbb{Z}$ .

**Definition 1.54.**  $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \ \& \ q \in \mathbb{N}\}$  sind die rationalen Zahlen.

Klarerweise  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

**Bemerkung 1.55.**  $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$  mit  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{P} \cap \mathbb{Q}$  erfüllt die 9 Körperaxiome und die 3 Anordnungsaxiome, dies lässt sich einfach überprüfen — da  $\frac{p}{q} \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}$  und  $\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn+qm}{qn}$ , führen die Operation  $+, \cdot$  von  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  nach  $\mathbb{Q}$  zurück,  $-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}$  und  $(\frac{p}{q})^{-1} = \frac{q}{p}$  für  $p > 0$ ,  $(\frac{p}{q})^{-1} = \frac{-q}{-p}$  für  $p < 0$  zeigt die Existenz der Inversen in  $\mathbb{Q}$ .

## Starke Induktion

**Satz 1.56.** WOHLORDNUNG DER NATÜRLICHEN ZAHLEN Sei  $M \subset \mathbb{N}$  nichtleer, dann existiert  $\min M$ .

**Korollar 1.57.** STARKES INDUKTIONSPRINZIP Sei  $P$  eine mathematische Aussage, so dass  $P(1)$  und  $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \in \mathbb{N} : k \leq n \Rightarrow P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ . Dann gilt  $P(n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .

### Bemerkungen

- auch als Prinzip der "least criminals" bekannt, eine gute Übersetzung wäre: die kleinsten "Bösewichte" im Sinne von minimalen Gegenbeispielen. Es ist oftmals einfacher, die Existenz solcher als die Existenz allgemeiner Gegenbeispiele auszuschliessen.
- warum *starkes* Induktionsprinzip genannt: Um das entscheidende  $P(n+1)$  zu beweisen, können wir nunmehr  $P(1), P(2), \dots, P(n)$  voraussetzen. Bisher konnten wir nur  $P(n)$  annehmen und also haben wir nun eine "stärkere" Beweismethode, die es erlaubt, mehr und "stärkere" Aussagen zu beweisen.

**Definition 1.58.** Wir sagen  $p$  ist Primzahl, wenn  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p > 1$  und  $(p = n \cdot m, \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}) \Rightarrow (n = 1 \text{ oder } m = 1)$ .

**Behauptung:** Jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > 1$  ist Produkt (eventuell einfaktoriell) endlich vieler Primzahlen. (Eindeutigkeit dieser Produktdarstellung ist viel tiefliegender und schwieriger!)

**Lemma 1.59.**  $\forall n \in \mathbb{N} : (\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \text{ oder } \exists l \in \mathbb{N} : n = 2l - 1)$ , und nur einer der Fälle tritt ein.

**Satz 1.60.**  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  irrational.

## Rational versus Reell

Weil nicht alle reellen Zahlen rational sind, müssen wir das Verhältnis von  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  studieren. Wir beginnen mit der folgenden Aussage, die auf Archimedes zurückgeführt wird, obwohl er Eudoxos von Knidos als Urheber erwähnt. Die Bezeichnung "Axiom" ist zwar in der Literatur aus historischen Gründen üblich, in der Theorie der reellen Zahlen jedoch unbegründet, da es sich hier um eine Konsequenz aus unseren 13 Axiomen handelt.

**Satz 1.61.** (Archimedisches "Axiom") Die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen ist in  $\mathbb{R}$  nicht von oben beschränkt.

**Korollar 1.62.** (Eudoxos)  $\forall x \in \mathbb{R} : x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

Nunmehr können wir zeigen, dass obwohl nicht alle Zahlen rational sind, die rationalen Zahlen zumindest alle Zahlen gut annähern können.

**Satz 1.63.** (Rationale Zahlen sind dicht) Für alle  $x < y$  reell existiert  $z \in \mathbb{Q}$  die  $x < z < y$  erfüllt.

## Die komplexen Zahlen

Als letzten Körper führen wir die komplexen Zahlen ein, in diesem Körper ist die in  $\mathbb{R}$  unlösbare Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  leicht lösbar.

**Definition 1.64.** Wir betrachten  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  mit den Operationen

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Dann ist  $\mathbb{C}$  ein Körper mit Nullelement  $(0, 0)$  (neutral für "+") und Einselement  $(1, 0)$  (neutral für ".").

### Bemerkung 1.65.

- nur die Axiome (MA), (MK) und (DG) erfordern Arbeit, (MA) die meiste Geduld
- für  $(a, b) \neq (0, 0)$  ist  $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$  das multiplikative Inverse
- $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ , d.h.  $x \rightarrow (x, 0)$  gibt  $\mathbb{R}$  als Unterkörper von  $\mathbb{C}$  - wir haben  $x + y \rightarrow (x, 0) + (y, 0)$  und  $x \cdot y \rightarrow (x, 0) \cdot (y, 0)$
- $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ !! Wir schreiben  $i$  für  $(0, 1)$  und  $a + bi$  für  $(a, b)$  Somit  $i^2 = -1$  und  $\mathbb{C}$  kann nicht angeordnet werden, d.h. es gibt kein  $\mathbb{P} \subset \mathbb{C}$ , das (O.1), (O.2) und (O.3) erfüllt.

**Definition 1.66.** Für  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  definieren wir

$$\operatorname{Re}(z) = a, \operatorname{Im}(z) = b, |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ Realteil, Imaginärteil und Betrag von } z$$

sowie

$$\bar{z} = a - bi \text{ die zu } z \text{ komplex konjugierte Zahl.}$$

Wie in  $\mathbb{R}$  ist  $|z|$  der Abstand von  $z$  zum Ursprung ( $\mathbb{C}$  wird mit der Euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  identifiziert).

**Lemma 1.67.**  $\forall z, w \in \mathbb{C}$

- a)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$  !  
 b)  $\bar{\bar{z}} = z, |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = |\bar{z}|, \operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2, \operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/2i.$

**Satz 1.68.** Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$

- a)  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$  und  $|\operatorname{Re}(z)| = |z| \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$   
 b)  $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$  (wie in  $\mathbb{R}$ )  
 c)  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$  Multiplikativität (wie in  $\mathbb{R}$ )  
 d)  $|z + w| \leq |z| + |w|$   $\Delta$ -Ungleichung (wie in  $\mathbb{R}$ )

**Proposition 1.69.** Komplexe Wurzeln Für gegebenes  $c \in \mathbb{C}$  suchen wir alle (da kein positives ausgezeichnet ist)  $w \in \mathbb{C}$  mit  $w^2 = c$ .

$w^2 = 0 \Leftrightarrow w = 0$ , wenn  $c \neq 0$  dann

$$w_1 = \sqrt{\frac{|c| + \operatorname{Re}(c)}{2}} + \sigma \sqrt{\frac{|c| - \operatorname{Re}(c)}{2}} i \text{ wo } \sigma = \begin{cases} 1 & \text{für } \operatorname{Im}(c) \geq 0 \\ -1 & \text{für } \operatorname{Im}(c) < 0 \end{cases}$$

ist Lösung, einzige andere Lösung ist  $w_2 = -w_1$ .

$$0 = z^2 + az + b = \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = \left(z + \frac{a}{2} + w\right)\left(z + \frac{a}{2} - w\right)$$

wobei  $w^2 = \frac{a^2}{4} - b$  kann somit in  $\mathbb{C}$  gelöst werden.

Das heißt, wir haben zu  $\mathbb{R}$  weitere Zahlen hinzugefügt, um die Wurzel aus jeder reellen Zahl ziehen zu können. Es wäre zu befürchten, dass wir nun wiederum weitere Zahlen hinzufügen müssen, um aus all den bereits hinzugefügten auch die Wurzel ziehen zu können. Proposition 1.69 zeigt, dass dies nicht mehr nötig ist!!

IM ZUSAMMENHANG MIT DER EXPONENTIALFUNKTION UND DER EULERSCHEN FORMEL WERDEN WIR BALD EINEN GEOMETRISCHEREN ZUGANG ZU DEN KOMPLEXEN ZAHLEN  $\mathbb{C}$  FINDEN, DER DIESE ALS EBENE UND DIE RECHENOPERATIONEN ALS GEOMETRISCHE VERSCHIEBUNGEN UND DREHSTRECKUNGEN INTERPRETIERT.

## Zählen in $\mathbb{N}$ - Mächtigkeiten

**Proposition 1.70.** Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $g : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  eine injektive (d.h.  $1-1$ ) Abbildung, dann ist  $g$  surjektiv.

**Korollar 1.71.** Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $G : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  surjektiv, dann ist  $G$  injektiv (d.h.  $1-1$ ).

**Definition 1.72.** Wir definieren  $\#M = 0$  wenn  $M = \emptyset$  und  $\#M = m$  wenn  $M \neq \emptyset$  und

$$m = \min\{l \in \mathbb{N} : \exists f : \{1, \dots, l\} \rightarrow M \text{ surjektiv}\}.$$

In beiden Fällen sagen wir "M ist endlich" und  $\#M$  ist die Kardinalität oder Mächtigkeit von M.

**Bemerkung 1.73.** Wenn man die leere Abbildung  $f : \emptyset \rightarrow \emptyset$  ( $f = \emptyset$ ) und die Bezeichnung  $\{1, \dots, 0\} = \emptyset$  akzeptiert, dann ist

$$\#M = \min\{l \in \mathbb{N}_0 : \exists f : \{1, \dots, l\} \rightarrow M \text{ surjektiv}\}$$

eine einheitliche Definition.

**Satz 1.74.** a) Sei  $M$  endliche Menge und  $g : \{1, \dots, \#M\} \rightarrow M$  surjektiv, dann ist  $g$  auch injektiv (und also eine Bijektion).

b) Sei  $g : \{1, \dots, m\} \rightarrow M$  eine Bijektion, dann ist  $\#M = m$ . Insbesondere gilt  $\#\{1, \dots, m\} = m$ .

c) Sei  $\#M = \#N$  endlich und  $f : M \rightarrow N$ . Dann ist  $f$  injektiv genau dann wenn  $f$  surjektiv genau dann wenn  $f$  eine Bijektion.

**Korollar 1.75.** Seien  $A$  und  $B$  endlich. Dann ist  $A \cup B$  und also auch  $A \cap B$  endlich. Es gilt

a) Wenn  $A \cap B = \emptyset$  dann  $(\#A) + (\#B) = \#(A \cup B)$ .

b) Allgemein  $(\#A) + (\#B) = \#(A \cup B) + \#(A \cap B)$ .

**Bemerkung:** Natürlich impliziert b) auch a), überdies lässt sich b) leicht auf drei oder mehr Mengen verallgemeinern (Prinzip der Inklusion-Exklusion).

**Lemma 1.76.** Sei  $M$  endlich. Dann hat  $M$  genau  $2^{\#M}$  Teilmengen (d.h.  $\#\mathfrak{P}(M) = 2^{\#M}$  wobei  $\mathfrak{P}(M) = \{N : N \subset M\}$ ), und für  $k \in \{0, \dots, \#M\}$  gibt es genau

$$\binom{\#M}{k} \quad k\text{-elementige Teilmengen von } M.$$

**Korollar 1.77.**  $\mathbb{N}$  ist unendlich(, d.h. nicht endlich).

**Definition 1.78.** Eine Menge  $M$  ist abzählbar, wenn es eine Teilmenge  $X$  von  $\mathbb{N}$  gibt und ein surjektives  $f : X \rightarrow M$ .

**Satz 1.79.** Sei  $M$  eine abzählbare Menge. Dann ist  $M$  entweder endlich oder es gibt eine Bijektion  $\varphi$  von  $\mathbb{N}$  auf  $M$ .

**Proposition 1.80.** a) Jede Teilmenge  $N$  einer beliebigen abzählbaren Menge  $M$  ist auch abzählbar. Ebenso  $f(M)$  abzählbar wenn  $M$  abzählbar.

b)  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  sind abzählbar.

c) Seien alle Mengen  $M_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  abzählbar. Dann ist auch

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \{m : \exists i : m \in M_i\},$$

abzählbar, sowie, für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Menge  $M_1 \times \dots \times M_k$  abzählbar.

**Satz 1.81.** (CANTOR) Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist nicht abzählbar (man sagt überabzählbar).

## 2. FOLGEN UND REIHEN

**Definition 2.1.** Eine Folge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  in  $\mathbb{R}$  (in  $\mathbb{C}, M$ ) ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$   $n \mapsto a_n$  ( $n \mapsto z_n \in \mathbb{C}$ ,  $n \mapsto x_n \in M$ ), dh. jedem  $n \in \mathbb{N}$  ist ein Folgenglied  $a_n$  ( $z_n, x_n$ ) zugeordnet.

**Definition 2.2.** Sei  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  Folge in  $\mathbb{C}$ . Wir sagen,  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  hat Grenzwert  $z \in \mathbb{C}$  wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N (= N_\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon.$$

Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert hat, sonst divergent.

**Bemerkung**

a) die Annahme, dass  $N = (N_\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , also eine natürliche Zahl ist, ist nicht wirklich notwendig und wird im Folgenden ausgelassen, auch wenn sie in der Literatur sehr oft gemacht wird. In der Tat, wenn für ein gegebenes  $\varepsilon > 0 \exists N (= N_\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon$ , da gibt es nach dem Archimedes' Axiom ein  $\hat{N} \in \mathbb{N}$  mit  $\hat{N} > N$  und also  $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq \hat{N} \Rightarrow n \geq N \Rightarrow |z - z_n| < \varepsilon$ .

b) die analoge Definition wird benutzt für den reellen Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  und die reelle Zahlenfolge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , da  $|a_n - a|_{\mathbb{R}} = |a_n - a|_{\mathbb{C}}$ , konvergieren reelle konvergente Folgen auch in  $\mathbb{C}$ .

**Satz 2.3.** Jede konvergente Folge hat genau einen Grenzwert.

Wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  oder auch  $(z_n \rightarrow z \text{ für } n \rightarrow \infty)$  wenn  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  Grenzwert  $z$  hat.

**Definition 2.4.** Eine Folge ist Nullfolge (**NF**) wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

**Beispiel 2.5.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Definition 2.6.**  $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  eine beschränkte Folge wenn  $\exists M \forall n \geq 1 : |z_n| \leq M$ , d.h. es gibt einen Kreis, der die gesamte Folge enthält.

**Proposition 2.7.** a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

b) Sei  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  Nullfolge und  $(u_n)_{n=1}^{\infty}$  beschränkt, dann ist  $(z_n u_n)_{n=1}^{\infty}$  wieder Nullfolge

**Lemma 2.8.** a) Sei  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  eine komplexe Folge, dann

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \Leftrightarrow (z - z_n)_{n=1}^{\infty} \text{ Nullfolge} \Leftrightarrow (|z - z_n|)_{n=1}^{\infty} \text{ reelle Nullfolge.}$$

b) Wenn  $(z_n)_{n=1}^{\infty}, (u_n)_{n=1}^{\infty}$  Nullfolgen sind, dann ist  $(z_n + u_n)_{n=1}^{\infty}$  auch eine Nullfolge.

**Korollar 2.9.** Algebra für Grenzwerte Seien  $(z_n)_{n=1}^{\infty}, (w_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergente Folgen in  $\mathbb{C}$

a)  $\forall \alpha \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + \alpha w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$  ( $\alpha = \pm 1$  wichtig)

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$

c) Wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$  dann gibt es  $N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : z_n \neq 0$ , und  $(z_n^{-1})_{n=N}^{\infty}$  hat Grenzwert  $(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n)^{-1}$

**Bemerkung** Wenn  $\mathfrak{z} = (z_n)_{n=1}^{\infty}$  eine konvergente Folge ist, bezeichnen wir

$$\mathcal{R}(\mathfrak{z}) = (z - z_n)_{n=1}^{\infty}, \text{ wobei } z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$$

als die zu  $\mathfrak{z}$  gehörige Fehler- oder Restfolge. Dann ist nach Lemma 2.8.a)  $\mathcal{R}(\mathfrak{z})$  automatisch eine Nullfolge. Falls auch  $\mathbf{u}$  eine konvergente Folge ist mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ , haben wir

$$\mathfrak{z} = (z)_{n=1}^{\infty} + \mathcal{R}(\mathfrak{z}) \quad \& \quad \mathbf{u} = (u)_{n=1}^{\infty} + \mathcal{R}(\mathbf{u}),$$

beidesmal geht es um die Summe einer konstanten und einer Nullfolge. Somit

$$(z_n + u_n)_{n=1}^{\infty} = \mathfrak{z} + \mathbf{u} = (z + u)_{n=1}^{\infty} + [\mathcal{R}(\mathfrak{z}) + \mathcal{R}(\mathbf{u})],$$

wobei in den eckigen Klammern die Summe zweier Nullfolgen, also eine Nullfolge steht (Lemma 2.8.b). Damit ist, wiederum nach Lemma 2.8.a)  $z + u$  der Grenzwert der Folge  $\mathfrak{z} + \mathbf{u}$ .

Analog, wenn auch etwas länger für Produkte, wobei wir hauptsächlich das Distributivgesetz benutzen.

$$\begin{aligned} (z_n \cdot u_n)_{n=1}^{\infty} &= \mathfrak{z} \cdot \mathbf{u} = [(z)_{n=1}^{\infty} + \mathcal{R}(\mathfrak{z})] \cdot [(u)_{n=1}^{\infty} + \mathcal{R}(\mathbf{u})] \\ &= (z)_{n=1}^{\infty} \cdot (u)_{n=1}^{\infty} + [(z)_{n=1}^{\infty} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{u}) + \mathcal{R}(\mathbf{u}) \cdot (u)_{n=1}^{\infty}] + [\mathcal{R}(\mathfrak{z}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{u})] \\ &= (z \cdot u)_{n=1}^{\infty} + [(z)_{n=1}^{\infty} \cdot \mathcal{R}(\mathbf{u}) + \mathcal{R}(\mathbf{u}) \cdot (u)_{n=1}^{\infty}] + [\mathcal{R}(\mathfrak{z}) \cdot \mathcal{R}(\mathbf{u})] \end{aligned}$$

Wir sehen in der ersten eckigen Klammer sind beide Summanden konstante mal Nullfolge, also wiederum Nullfolge nach Prop 2.7.b, wie auch die ganze erste eckige Klammer (L.2.8.b). Natürlich sind Nullfolgen beschränkt (siehe auch Prop 2.7.a), also steht auch in der zweiten eckigen Klammer eine Nullfolge (Prop 2.7.b). Insgesamt haben wir  $(z_n \cdot u_n)_{n=1}^{\infty}$  als Summe von der konstanten Folge  $(z \cdot u)_{n=1}^{\infty}$  und einer Nullfolge geschrieben, also hat  $(z_n \cdot u_n)_{n=1}^{\infty}$  den Grenzwert  $z \cdot u$ .

Allein die Quotienten von konvergenten Folgen (Korollar 2.9.c) lassen sich nicht so "rein algebraisch" abhandeln.

**Beispiel 2.10.** a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+23}{n^2+2019n+42} = 2$

b) Wenn  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$  und  $\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} n^k z^n = 0$   
(Münchhausentricks)

**Satz 2.11.** Möge  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$  und seien alle  $a_n, b_n$  und  $a, b$  reelle Zahlen.  
(2. Annahme erweist sich im Weiteren als unnötig)

- a) Wenn  $a_n \leq b_n$  für alle  $n$ , dann  $a \leq b$ .  
b) Sandwichprinzip Wenn  $(c_n)_{n=1}^{\infty}$  Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $\forall n : a_n \leq c_n \leq b_n$  und wenn  $a = b$  dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

Konvergenz in  $\mathbb{C}$  kann auf Konvergenz reeller Folgen zurückgeführt werden:

**Proposition 2.12.** Sei  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  eine komplexe Folge.

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0 \Leftrightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \ \& \ \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z))$ .  
b) wenn  $z_n \in \mathbb{R}$  für alle  $n$ , und  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  (in  $\mathbb{C}$ ), dann  $z \in \mathbb{R}$ .

Somit hat eine reelle Folge einen Grenzwert im Reellen genau dann wenn sie einen Grenzwert im Komplexen hat. Vergleiche mit der Situation bzgl.  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$ !

Für Konvergenz in  $\mathbb{R}$  gibt es sehr allgemeine und nützliche Kriterien.

**Definition 2.13.** Wir sagen eine Folge  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  ist monoton wachsend (fallend) wenn

$$\forall n < m : a_n \leq a_m \quad (a_n \geq a_m).$$

Induktion gibt:  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  monoton wachsend (fallend) gdw.  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ ).  
D.h. lokales Wachstum erzwingt auch globales Wachstum.

**Satz 2.14.** Monotonie und Konvergenz Sei  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine beschränkte und monoton wachsende (fallende) reelle Folge. Dann ist  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergent mit Grenzwert  $\sup_{n \geq 1} a_n$  ( $\inf_{n \geq 1} a_n$ ).

**Beispiel 2.15.** a)  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  Eulersche Zahl,  $2 < e < 3$ ,  
b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**Definition 2.16.** Sei  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge in  $M$  (beliebige Menge). Wenn  $(n_k)_{k=1}^{\infty}$  eine strikt wachsende ( $n_{k+1} > n_k$ ) Folge in  $\mathbb{N}$  ist, dann ist  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ , also  $k \mapsto x_{(n_k)}$ , eine Teilfolge von  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ .

**Proposition 2.17.** Jede reelle Folge hat eine monotone Teilfolge!

Natürlich gilt: Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist wiederum konvergent mit demselben Grenzwert. Teilfolge einer Teilfolge ist auch Teilfolge der ursprünglichen Folge.

**Satz 2.18.** Bolzano-Weierstrass Jede beschränkte komplexe Folge hat eine konvergente Teilfolge.

**Beispiel 2.19.** KETTENBRÜCHE

$$a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}}} = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}.$$

Nunmehr wollen wir entscheiden, wann eine Folge konvergent ist, ohne deren Grenzwert kennen zu müssen!

**Definition 2.20.** Eine komplexe Folge  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  ist eine Cauchy-Folge (oder auch Fundamentalfolge) wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N (= N_\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

**Proposition 2.21.** Sei  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}$ , dann

- a)  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  ist beschränkt
- b) Wenn für eine Teilfolge  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = z$  dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  für die ganze Folge.

**Korollar 2.22.** Cauchy-Kriterium Eine komplexe Folge ist konvergent genau dann wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Anwendung dieser allgemeinen Konvergenzsätze beim Verstehen “unendlicher Summen”, wichtige Funktionen wie  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$  durch solche “unendlichen Polynome”  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  gegeben.

$$\text{Idee: } a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

**Definition 2.23.** Für  $(z_n)_{n=1}^{\infty}$  in  $\mathbb{C}$  ist  $s_n = \sum_{k=1}^n z_k$  die  $n$ -te Partialsumme dieser Folge. Die Folge  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  nennt man Reihe  $\sum_k z_k$  ( $= \sum_n z_n$ ).

Reihe  $\sum_k z_k$  konvergent (divergent) gdw.  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  eine konvergente (divergente) Folge. Wir schreiben  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = s$ , die Summe der Reihe, wenn  $s_n \rightarrow s$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Die Zahlen  $z_k$  sind die Glieder der Reihe  $\sum_k z_k$ .

**Proposition 2.24.** Algebra für Reihen Seien  $\sum_n z_n, \sum_n w_n$  konvergente Reihen in  $\mathbb{C}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann  $\sum_n (\alpha z_n + \beta w_n)$  konvergent und

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha z_n + \beta w_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

Problem oft: keine expliziten Formeln für  $s_n$ , brauchen allgemeine Konvergenzsätze.

**Satz 2.25.** Cauchy-Kriterium für Reihen

$$\sum_n z_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N (= N_\varepsilon) \forall n \geq N \forall l \geq 1 : \left| \sum_{k=n+1}^{n+l} z_k \right| < \varepsilon.$$

**Korollar 2.26.**

- $\exists N \forall n \geq N : z_n = w_n$ , dann  $(\sum_n z_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_n w_n \text{ konv.})$ , die Summen der Reihen können natürlich verschieden sein!
- Notwendige** Bedingung:  $\sum_n z_n \text{ konv.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

**Beispiel 2.27.** harmonische Reihe  $\sum_n \frac{1}{n}$  divergent! (Obwohl  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .)

**Proposition 2.28.** Beschränktheit Sei  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann

$$\sum_n a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \exists C \forall n \sum_{k=1}^n a_k \leq C \text{ (d.h. } (s_n)_n \text{ beschränkt)}.$$

**Korollar 2.29.** Vergleichskriterium Sei  $0 \leq a_n \leq b_n \forall n (\geq N)$ . Dann

$$\left( \sum_n b_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konv.} \right) \& \left( \sum_n a_n \text{ div.} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ div.} \right)$$

**Beispiel 2.30.**

- Geometrische Reihe  $\forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \Leftrightarrow \sum_n z^n \text{ konv.}$  ( $\& \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$  dann).
- Teleskopische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$  konvergent

**Proposition 2.31.** Wurzel- & Quotientenkriterium Sei  $a_n \geq 0 \forall n$ .

- a)  $(\exists C \exists a < 1 \forall n : a_n \leq C a^n) \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konv.}$   
 b)  $(\exists N \exists q < 1 \forall n \geq N : a_{n+1} \leq q a_n) \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konv.}$

**Bemerkung:** b) $\Rightarrow$ a) und nicht umgekehrt, z.B. für Folge  $a_{2n} = 1/3^n$  und  $a_{2n+1} = 1/2^n$  ist a) erfüllt mit  $a = 1/\sqrt{2}$  aber nicht b) weil  $a_{2n+1}/a_{2n} = (3/2)^n \gg 1$ . Quotientenkriterium aber oft einfacher auszuwerten, deshalb erstmal Verhalten von  $a_{n+1}/a_n$  für grosse  $n$  untersuchen.

Einfach nutzbare Kriterien:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow a)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n < 1 \Rightarrow b)$ .

**Vorsicht:**  $\forall n : a_{n+1}/a_n < 1$  impliziert *nicht* die Konvergenz, z.B. siehe  $a_n = 1/n$ .

**Satz 2.32.** Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen. Sei  $a_n \geq 0, a_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\boxed{\forall n : a_n \geq a_{n+1} \forall n}$ . Dann ist  $\sum_n (-1)^n a_n$  konvergent.

**Beispiel 2.33.**  $\frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots \leq 1$  alternierende harmonische Reihe

**Bemerkung 2.34.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  kann sich durch Umordnen (unendlich vieler)  $a_n$  ändern (sogar divergieren).

Wir betrachten konkret die alternierende harmonische Reihe, und definieren folgende Umordnung

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{29} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Die Idee ist, ähnlich wie bei der harmonischen Reihe positive Blöcke der Länge  $2^k$  aus Reziproken ungerader Zahlen zu bilden und nur mit einem negativen Reziproken der  $k$ -ten geraden Zahl zu kombinieren. Da wir nur mit jeder zweiten (da ungeraden) Zahl arbeiten, wird die Summe über den positiven Block ungefähr  $1/4$  statt des vorherigen  $1/2$  sein, aber noch immer viel grösser als das Reziproke der  $k$ -ten geraden Zahl. Somit muss die Folge der Partialsummen über diese Blöcke (bestimmt) divergent sein. Die formale Rechnung erfordert etwas Sorgfalt. Wir erhalten für das allgemeine Reihenglied

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{(n-k)+1}} & \text{wenn } 2^{k-1} + (k-1) - 1 < n < 2^k + k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ -\frac{1}{2^k} & \text{wenn } n = 2^k + k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dann ergibt sich für die Partialsummen  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$$\begin{aligned} s_{2^{k+1}+(k+1)-1} - s_{2^k+k-1} &= \sum_{n=2^k+k}^{2^{k+1}+k-1} \frac{1}{2(n - (k+1)) + 1} - \frac{1}{2(k+1)} \quad \text{und mit } l = n - k \\ &= \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2(k+1)} \geq (2^{k+1} - 2^k) \frac{1}{2(2^{k+1}-1)-1} - \frac{1}{2(k+1)} \\ &\geq (2^k) \frac{1}{2 \cdot 2^{k+1}} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)} \geq \frac{1}{8} \text{ wenn } k \geq 3 \end{aligned}$$

Es folgt (mit Induktion)  $s_{2^{k+3}+(k+3)-1} \geq s_{10} + (k/8)$ , und die Folge  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  ist somit unbeschränkt und also divergent, genauer gesagt  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ .

**Satz 2.35. (RIEMANN)** Sei  $\sum_n a_n$  eine konvergente reelle Reihe, so dass  $\sum_n |a_n|$  divergiert. Dann gibt es für jedes  $s \in \mathbb{R}$  eine Permutation (d.h. Bijektion, d.h. Umordnung)  $\sigma$  von  $\mathbb{N}$  so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s.$$

Es gibt auch Permutationen  $\sigma_{\pm}$  so dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_{\sigma_{\pm}(n)} = \pm\infty.$$

**Beweis** Sei also  $s \in \mathbb{R}$ , die Definition von  $\sigma$  ist ein einfacher Algorithmus. Wir setzen zuerst

$$I_+ = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0\} \text{ und } I_- = \{n \in \mathbb{N} : a_n < 0\},$$

und wählen die Startwerte  $I_+(0) = I_+, I_-(0) = I_-$  sowie  $k = 0$ . Nun wird induktiv definiert

$$\sigma(k+1) = \begin{cases} \min I_+(k) & \text{wenn } \sum_{l=1}^k a_{\sigma(l)} < s \\ \min I_-(k) & \text{wenn } \sum_{l=1}^k a_{\sigma(l)} \geq s \end{cases}, \text{ also dann } \begin{cases} a_{\sigma(k+1)} \geq 0 \\ a_{\sigma(k+1)} < 0 \end{cases},$$

sowie  $I_+(k+1) = I_+(k) \setminus \{\sigma(k+1)\}$  und  $I_-(k+1) = I_-(k) \setminus \{\sigma(k+1)\}$  — effektiv wird natürlich nur eine der Mengen geändert. Nun können wir den induktiven Definitionsschritt iterieren.

Anspruchsvoller ist es nun zu zeigen, dass  $\sigma$  auf ganz  $\mathbb{N}$  definiert ist (d.h. immer  $\sigma(k+1)$  existiert), es eine Permutation ist und die umgeordnete Reihe die Summe  $s$  hat. Wir betrachten dazu

$$b_+(N) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \in I_+}}^N |a_n| \text{ und } b_-(N) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \in I_-}}^N |a_n|.$$

Da  $a_n = |a_n|$  wenn  $n \in I_+$  und  $a_n = -|a_n|$  wenn  $n \in I_-$  erhalten wir

$$\sum_{n=1}^N |a_n| = b_+(N) + b_-(N) \text{ und } \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{\substack{n=1 \\ n \in I_+}}^N |a_n| + \sum_{\substack{n=1 \\ n \in I_-}}^N (-|a_n|) = b_+(N) - b_-(N).$$

Weil nach Voraussetzung  $\sum_n a_n$  konvergiert, ist die Folge der Partialsummen konvergent und somit beschränkt, d.h.

$$\exists C \forall N : |b_+(N) - b_-(N)| = \left| \sum_{n=1}^N a_n \right| < C.$$

Deshalb folgt  $b_+(N) - b_-(N), b_-(N) - b_+(N) \leq C$  und also

$$\forall N : \sum_{n=1}^N |a_n| = b_+(N) + b_-(N) \leq 2b_+(N) + C, 2b_-(N) + C.$$

Da nach Voraussetzung  $\sum_{n=1}^N |a_n| \rightarrow \infty$  wenn  $n \rightarrow \infty$ , erhalten wir

$$(1) \quad b_+(N) \rightarrow \infty \text{ und } b_-(N) \rightarrow \infty \text{ wenn } n \rightarrow \infty.$$

Somit sind  $I_+$  und  $I_-$  unendliche Mengen und also

$$(2) \quad I_+(k) = I_+ \setminus \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)\} \text{ und } I_-(k) = I_- \setminus \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k)\}$$

für jedes  $k$  nichtleer, deshalb  $\sigma(k+1)$  wohldefiniert. Weiterhin gilt

$$(3) \quad \sigma(k) < \sigma(l) \text{ wenn beide } \sigma(k), \sigma(l) \in I_+ \text{ oder beide } \sigma(k), \sigma(l) \in I_-, \text{ und } k < l.$$

$$(4) \quad \text{wenn } n < \sigma(l) \text{ beide in } I_+ \text{ (bzw. in } I_-) \Rightarrow \exists m : m < l \text{ und } \sigma(m) = n.$$

Die Aussage (3) folgt leicht, wenn man

$$\sigma(k) = \min I_{\pm}(k-1) \text{ und } \sigma(l) \in I_{\pm}(l-1) \subset I_{\pm}(k) \subset I_{\pm}(k-1) \setminus \{\sigma(k)\}$$

nutzt, da dies  $\sigma(k) \leq \sigma(l)$  aber auch  $\sigma(l) \neq \sigma(k)$  bedeutet. (Hier, und im Folgenden bezeichnet  $I_{\pm}$  je nach zu betrachtendem Fall bis zum Ende des Arguments entweder immer  $I_+$  oder immer  $I_-$ .) Behauptung (4) ist auch einfach zu sehen, zunächst folgt aus  $n < \sigma(l) = \min I_{\pm}(l-1)$ , dass  $n \notin I_{\pm}(l-1)$ . Da  $n \in I_{\pm}$ , erhalten wir aus (2) wie zu zeigen:

$$n \in I_{\pm} \setminus I_{\pm}(l-1) = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(l-1)\}. \text{ Also } \exists m \in \{1, 2, \dots, l-1\} : n = \sigma(m).$$

Wir sehen nun, dass  $\sigma$  *injektiv* ist, da aus  $k < l$  immer  $\sigma(k) \neq \sigma(l)$  folgt — ansonsten müssten wegen  $I_+ \cap I_-$  ja beide in derselben der Mengen  $I_+$ ,  $I_-$  liegen, dann zeigt aber (3), dass  $\sigma(k) < \sigma(l)$ . Deshalb ist für jedes  $N \in \mathbb{N}$  die Menge  $\{k : \sigma(k) \in \{1, 2, \dots, N\}\}$  von Mächtigkeit höchstens  $N$ , somit endlich und hat ein Maximum  $M_N$ . Dies zeigt, dass  $\sigma(k) > N$  wenn  $k > M_N$  und also

$$(5) \quad \sigma(k) \rightarrow \infty \text{ für } k \rightarrow \infty, \sigma \text{ ist injektiv.}$$

Warnung: Es ist im Allgemeinen nicht zu erwarten, dass  $\sigma$  monoton ist, denn die einzige monotone Permutation von  $\mathbb{N}$  ist die Identität! Um aus (4) die geforderte Surjektivität herzuleiten, zeigen wir:  $\sigma$  nimmt in  $I_+$  und auch in  $I_-$  beliebig große Werte an.

Diese entscheidende Behauptung

$$(6) \quad \text{Für jedes } l \in \mathbb{N} \text{ gibt es } k_+ > l \text{ und } k_- > l : \sigma(k_+) \in I_+ \text{ und } \sigma(k_-) \in I_-$$

beweisen wir durch Widerspruch. Wir nehmen also zum Beispiel an, dass es ein  $l_0$  gibt, so dass  $\sigma(k) \in I_+$  für alle  $k \geq l_0$ . Nach (3) und vorallem wegen (4) wissen wir, dass

$$\forall k \geq 1 : \quad \{\sigma(l_0+1), \sigma(l_0+2), \dots, \sigma(l_0+k)\} = \{n \in I_+ : \sigma(l_0) < n \leq \sigma(l_0+k)\}.$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{l_0+k} a_{\sigma(m)} - \sum_{m=1}^{l_0} a_{\sigma(m)} = \sum_{m=l_0+1}^{l_0+k} a_{\sigma(m)} = \sum_{\substack{n=\sigma(l_0)+1 \\ n \in I_+}}^{\sigma(l_0+k)} a_n = b_+(\sigma(l_0+k)) - b_+(\sigma(l_0)).$$

Wegen (1) geht  $b_+(N) \rightarrow \infty$  wenn  $N \rightarrow \infty$ . Nach (5) auch  $\sum_{m=1}^{l_0+k} a_{\sigma(m)} \rightarrow \infty$  wenn  $k \rightarrow \infty$ , d.h. es gibt ein  $k$  mit  $\sum_{m=1}^{l_0+k} a_{\sigma(m)} > s$  und also  $\sigma(l_0+k+1) \in I_-$ , was unserer Annahme widerspricht. Vollkommen analog erhalten wir einen Widerspruch, wenn  $\sigma(k) \in I_-$  für alle  $k \geq l_0$  vorausgesetzt wird.

Der Rest des Beweises der Surjektivität ist einfach. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , dann gibt es nach (5) ein  $l$  mit  $\sigma(k) > n$  für alle  $k \geq l$ . Falls  $n \in I_+$  dann finden wir nach (6) ein  $k > l$  so dass  $\sigma(k) \in I_+$  und natürlich auch  $n < \sigma(k)$ , also gemäss (4) gibt es ein  $m$ , so dass  $n = \sigma(m)$ . Die gleiche Schlussfolgerung erhält man analog im Falle  $n \in I_-$ . Also ist  $\sigma$  surjektiv und somit eine Permutation.

Zum Schluss zeigen wir, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} = s$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig aber vorgegeben. Da  $\sum_n a_n$  konvergiert, ist  $(a_n)_n$  eine **Nullfolge** und es gibt  $K \in \mathbb{N}$ , so dass  $k \geq K \Rightarrow |a_k| < \varepsilon$  und wegen (5) natürlich auch ein  $N_1 \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N_1 \Rightarrow \sigma(n) > K$ . Wegen (6) finden wir schliesslich  $N_+ > N_1$  und  $N_- > N_1$  mit  $\sigma(N_+ + 1) \in I_+$  und  $\sigma(N_- + 1) \in I_-$  und setzen  $N = \max(N_+, N_-) + 1$ . Nun gilt

$$(7) \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow s - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} \leq s + \varepsilon.$$

In der Tat, sonst gibt es o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) ein  $n \geq N$  mit  $\sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} > s + \varepsilon$  (der Fall  $\sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} < s - \varepsilon$  kann vollkommen analog behandelt werden). Dann ist die Menge

$$A = \left\{ m \geq N_+, \sum_{k=1}^m a_{\sigma(k)} > s + \varepsilon \right\}$$

nichtleer (da  $n \in A$ ) und hat ein Minimum, dass wir  $m_0$  nennen. Da  $\sigma(N_+ + 1) \in I_+$ , gilt wegen der Definition von  $\sigma$ , dass  $\sum_{k=1}^{N_+} a_{\sigma(k)} \leq s$ . Somit  $N_+ \notin A$  und  $m_0 - 1 \geq N_+$ , also

$$m_0 - 1 \notin A \Rightarrow \sum_{k=1}^{m_0-1} a_{\sigma(k)} \leq s + \varepsilon < \sum_{k=1}^{m_0} a_{\sigma(k)} \Rightarrow a_{\sigma(m_0)} > 0 \Rightarrow \sigma(m_0) \in I_+.$$

Andererseits gilt  $-a_{\sigma(m_0)} \geq -|a_{\sigma(m_0)}| > -\varepsilon$  wegen  $m_0 > N_+ > N_1$ , d.h.  $\sigma(m_0) > K$  und also

$$\sum_{k=1}^{m_0-1} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{m_0} a_{\sigma(k)} - a_{\sigma(m_0)} > (s + \varepsilon) - \varepsilon = s \Rightarrow \sigma(m_0) \in I_-,$$

Widerspruch! Dies beweist (7) und beendet unseren Beweis. ☺

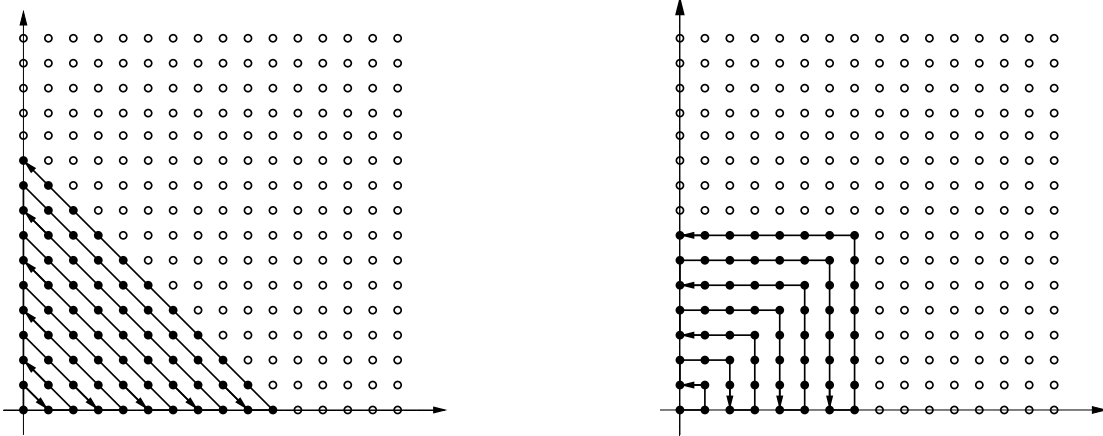
Der Fall  $s = \pm\infty$  erfordert einen etwas anderen Beweis, man kann sich aber gut vom Vorgehen in der Bemerkung 2.34 inspirieren lassen, zum Beispiel wenn  $s = -\infty$  wählt man zuerst negative Glieder, bis die Partialsumme kleiner  $-1$  ist, danach das erste positive Glied. Danach weitere negative Glieder, bis die Partialsumme kleiner  $-2$  ist, danach das zweite positive Glied u.s.w.

Das gerade studierte Phänomen mag etwas "konstruiert erscheinen". Es ist zweifelsohne von grosser praktischer Bedeutung, wenn wir Produkte von Reihen studieren - z.B. um die fundamentale Identität  $e^{x+y} = e^x e^y$  herzuleiten. Es gibt tatsächlich keinen kanonischen Weg wie die Produkte der unendliche vielen Paare der Glieder zweier Reihen anzuordnen sind., wie folgendes Beispiel zeigt.

**Beispiel 2.36.** Wir betrachten die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / \sqrt{n+1}$ , wegen des Leibnitzkriteriums konvergiert diese Reihe. Was ist nun das Produkt der Reihe mit sich selbst?

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\sqrt{m+1}} \right) \stackrel{?}{=} \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^{n+m}}{\sqrt{n+1}\sqrt{m+1}},$$

insbesondere, was bedeutet die rechte Doppelsumme? Es gibt wohl zwei "gleichnatürliche" Wege,  $\sum a_n b_m$  über  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  zu summieren. Diese sind in folgenden Bildern zusammen mit den entstehenden Partialsummen dargestellt.



$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^K \sum_{\max\{n,m\}=k} a_n b_m = \left( \sum_{n=0}^K a_n \right) \left( \sum_{m=0}^K a_m \right)$$

In unserem Beispiel erhalten wir eine konvergente und eine divergente Folge von Partialsummen. Klarerweise

$$\left( \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right) \rightarrow \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)^2$$

gemäss der Algebra konvergenter Folgen. Andererseits sagt uns

$$0 \leq (\sqrt{k+1} - \sqrt{n-k+1})^2 = n+2 - 2\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}, \text{ dass}$$

$$\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1} \leq \frac{n+2}{2} \text{ und also } \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{2}{n+2} \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Somit

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \right| \geq \sum_{k=0}^n \frac{2}{n+2} \geq \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

also gehen die Glieder der äusseren Reihe nicht gegen Null und die linke Doppelreihe ist divergent.

Um den Einfluss der Umordnung aufzuheben, führen wir die Begriffe “verallgemeinerte Reihen” und absolute Konvergenz ein.

Wir betrachten allgemeine Indexmengen  $I$ , vorher nur  $I = \mathbb{N}$ .

**Definition 2.37.** Sei  $I$  endlich,  $j \notin I$  und  $\forall i \in \{j\} \cup I : z_i \in \mathbb{C}$ . Wir definieren rekursiv

$$\sum_{i \in \{j\} \cup I} z_i = z_j + \sum_{i \in I} z_i, \text{ wobei } \sum_{i \in \emptyset} z_i = 0.$$

**Bemerkung:** Diese Definition ist korrekt, für jedes endliche  $I$  ist  $\sum_{i \in I} z_i$  wohldefiniert (dh. unabhängig von Reihenfolge wie Elemente zugefügt wurden, um  $I$  zu erhalten, es gilt das verallgemeinerte Kommutativgesetz). Ansonsten gäbe es ein Gegenbeispiel von minimaler Mächtigkeit, also ein endliches  $I$  mit  $j, k \in I$  so dass  $\sum_{i \in I \setminus \{j\}} z_i$  und  $\sum_{i \in I \setminus \{k\}} z_i$  wohldefiniert sind, aber

$$z_j + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} z_i \neq z_k + \sum_{i \in I \setminus \{k\}} z_i.$$

Dann natürlich  $j \neq k$ . Wegen Wohldefiniertheit der Summen über  $I \setminus \{j\}$  und  $I \setminus \{k\}$  gilt aber

$$z_j + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} z_i = z_j + (z_k + \sum_{i \in I \setminus \{j,k\}} z_i) = z_k + (z_j + \sum_{i \in I \setminus \{j,k\}} z_i) = z_k + \sum_{i \in I \setminus \{k\}} z_i,$$

Widerspruch!

Ausserdem zeigt Induktion in  $\#(I \cup J)$ , dass für alle  $I, J$  endlich

$$I \cap J = \emptyset \Rightarrow \sum_{i \in I \cup J} z_i = \sum_{i \in I} z_i + \sum_{i \in J} z_i.$$

Nun studieren wir  $I$  unendlich

**Definition 2.38.** Eine Folge von Mengen  $(I_n)_{n=1}^{\infty}$  schöpft die Menge  $I$  aus, wenn  $\forall n \in \mathbb{N} : I_n$  endlich &  $I_n \subset I_{n+1} \subset I$  und  $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n = I$ , d.h.  $\forall i \in I \exists n : i \in I_n$ .

Bisher  $I = \mathbb{N}$  durch  $I_n = \{k : k \leq n\}$  ausgeschöpft, die  $I_n$  zur Definition der Partialsummen genutzt.

**Lemma 2.39.** Wenn  $(I_n)_{n=1}^{\infty}$  die Menge  $I$  ausschöpft und  $J \subset I$  ist endlich, dann  $\exists N \in \mathbb{N} : J \subset I_N$  ( und also  $\forall n \geq N : J \subset I_n$ ).

**Definition 2.40.** Die verallgemeinerte Reihe  $\sum_{i \in I} z_i$ ,  $z_i \in \mathbb{C}$  ist absolut konvergent wenn

$$\exists C \forall J \subset I \text{ endlich } \sum_{i \in J} |z_i| < C.$$

**Satz 2.41.** Sei  $I$  von  $(\hat{I}_n)_{n=1}^{\infty}$  ausgeschöpft.

- a) Wenn  $\forall i \in I : a_i \geq 0$  und wenn  $s \in \mathbb{R}$  gegeben, dann sind folgende Aussagen äquivalent
- (i)  $s = \sup\{\sum_{i \in J} a_i : J \subset I \text{ endlich}\}$
  - (ii)  $\forall (I_n)_{n=1}^{\infty}$ , die  $I$  ausschöpft, gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_n} a_i = s$

- (iii)  $\exists (I_n)_{n=1}^\infty$ , die  $I$  ausschöpft, so dass:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_n} a_i = s$
- b) Für gegebene  $a_i \geq 0$  gilt ( $\exists s$  so dass a.i)–a.iii) gelten)  $\Leftrightarrow \sum_{i \in I} a_i$  absolut konvergent ist).
- c) Wenn  $\sum_{i \in I} z_i$  (wo nur  $z_i \in \mathbb{C}$  verlangt) absolut konvergent ist, dann  $\forall (I_n)_{n=1}^\infty, (I'_n)_{n=1}^\infty$ , die  $I$  ausschöpfen, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_n} z_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I'_n} z_i \text{ existieren in } \mathbb{C}.$$

Moral: Wenn  $\sum_{i \in I} z_i$  absolut konvergent, dann  $\sum_{i \in I} z_i$  entlang jeder Folge von Partialsummen konvergent zum selben Grenzwert.

**Beweis** In a) ist der letzte Teil klar, weil das Supremum in (i) existiert gdw. die Menge in (i) von oben beschränkt gdw.  $\sum_{i \in I} a_i$  absolut konvergent (da  $a_i = |a_i|$ ). Nun zeigen wir die Äquivalenzen in a).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Setzen  $s_n = \sum_{i \in I_n} a_i$ , dann  $\forall n : I_n \subset I$ , also für  $J = I_n$  ist  $s_n$  in der Menge in (i), somit  $s_n \leq s$ . Ausserdem,  $\forall \varepsilon > 0 \exists J \subset I$  endlich mit  $\sum_{i \in J} a_i > s - \varepsilon$  (Approximationseigenschaft). Nach Lemma 2.39  $\exists N \forall n \geq N : J \subset I_n \Rightarrow \forall n \geq N : \sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I_n} a_i$  (da  $a_i \geq 0$ ). Also  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : s - \varepsilon \leq s_n \leq s$ , d.h.  $s_n \rightarrow s$  für  $n \rightarrow \infty$ , wie zu zeigen war.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Nach Voraussetzung gibt eine Folge  $(\hat{I}_n)_{n=1}^\infty$ , die  $I$  ausgeschöpft. Diese erfüllt wegen (ii) auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in \hat{I}_n} a_i = s$  und somit auch ganz (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Wieder  $s_n = \sum_{i \in I_n} a_i$  für Folge  $(I_n)_1^\infty$  in (iii), dann  $s_n \rightarrow s$  für  $n \rightarrow \infty$ . Nun,  $\forall J \subset I$  endlich existiert nach Lemma 2.39 ein  $N$  mit  $J \subset I_N$ , also  $\forall n \geq N : \sum_{i \in J} a_i \leq s_N \leq s_n$  (weil  $a_i \geq 0$ ). Wegen  $s_n \rightarrow s$  gilt dann auch  $\sum_{i \in J} a_i \leq s$  für alle  $J \subset I$  endlich. Damit ist die Menge in (i) von oben beschränkt durch  $s$  und hat folglich  $s' = \sup\{\sum_{i \in J} a_i : J \subset I \text{ endlich}\} \leq s$ . Andererseits, weil  $\forall n : I_n \subset I$  endlich, ist jedes  $s_n$  in der Menge in (i), somit  $\forall n : s_n \leq s'$ . Für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir  $\lim_n s_n = s \leq s'$  und  $s = s'$  ist, wie gefordert, gezeigt.

Damit ist a) bewiesen, wir bemerken, dass die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  nie genutzt wurde, da der entsprechende (Grenz)Wert  $s$  bereits vorgegeben war, die a) gilt also in  $\mathbb{Q}$  analog.

Anders für b). Wenn das in a.i) . . . a.iii) geforderte  $s$  existiert, dann kann  $s+1$  klarerweise als  $C$  in Definition 2.40 dienen denn  $\sum_{i \in J} |a_i| = \sum_{i \in J} a_i$  wenn  $J \subset I$  endlich. Umgekehrt, wenn ein solches  $C$  wie in Definition 2.40 verlangt existiert, dann hat die von oben durch  $C$  beschränkte Menge aller Summen  $\sum_{i \in J} a_i$ , wobei  $J$  das System der endlichen Teilmengen von  $I$  durchläuft, wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  ein Supremum  $s$ , also gilt a.i), und somit auch a.ii) und a.iii).

Um c) zu zeigen, setzen wir wiederum  $s_n = \sum_{i \in I_n} z_i$ ,  $s'_n = \sum_{i \in I'_n} z_i$  nunmehr komplexe Zahlen. Wir werden zeigen, dass  $(s_n)_1^\infty, (s'_n)_1^\infty$  Cauchyfolgen sind mit  $\lim_n s_n = \lim_n s'_n$ . Weil  $\sum_I z_i$  absolut konvergent ist, existiert  $S = \sup\{\sum_{i \in J} |z_i| : J \subset I \text{ endlich}\}$ .

Dann  $\forall \varepsilon > 0 \exists J_0 \subset I$  endlich  $S - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i \in J_0} |z_i|$  (Approximationseigenschaft). Somit  $\forall J \subset I \setminus J_0$  endlich gilt

$$(8) \quad \sum_{i \in J} |z_i| = \sum_{i \in J \cup J_0} |z_i| - \sum_{i \in J_0} |z_i| < S - (S - \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen Lemma 2.39  $\exists N : J_0 \subset I_N$  und dann

$$\forall n \geq N \forall l \geq 1 : |s_n - s_{n+l}| = \left| \sum_{I_{n+l} \setminus I_n} z_i \right| \leq \sum_{I_{n+l} \setminus I_n} |z_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Das zeigt  $(s_n)_n$  ist Cauchyfolge, hat  $s = \lim_n s_n$ . Analog ist  $(s'_n)_n$  ist Cauchyfolge, hat  $s' = \lim_n s'_n$ . Warum sind die beiden komplexen Zahlen  $s, s'$  gleich? Nach Dreiecksungleichung  $|s_n - s'_n| \leq |s_n - \sum_{i \in J_0} z_i| + |s'_n - \sum_{i \in J_0} z_i|$ . Somit für  $n \geq \max(N, N')$  folgt, wiederum obige Ungleichung (8) nutzend,

$$|s_n - s'_n| \leq \left| \sum_{i \in I_n \setminus J_0} z_i \right| + \left| \sum_{i \in I'_n \setminus J_0} z_i \right| \leq \sum_{i \in I_n \setminus J_0} |z_i| + \sum_{i \in I'_n \setminus J_0} |z_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir  $|s - s'| = \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n - s'_n| \leq \varepsilon$ , weil  $\varepsilon > 0$  beliebig muss  $s = s'$  sein und unser Beweis ist beendet.

### Korollar 2.42.

- a) **SATZ VON DIRICHLET** Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  eine absolut konvergente komplexe Reihe (d.h.  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  konvergent). Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  konvergent, und  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\phi(n)}$  für jede Umordnung  $\phi$  von  $\mathbb{N}$  (d.h.  $\forall n \in \mathbb{N} : \phi(n) \in \mathbb{N}$  und für jedes  $m \in \mathbb{N}$  gibt es genau ein  $n \in \mathbb{N} : \phi(n) = m$ .)
- b) **CAUCHYPRODUKT** Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n, \sum_{n=0}^{\infty} w_n$  absolut konvergente komplexe Reihen. Dann ist  $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} z_n w_m$  eine absolut konvergente (verallgemeinerte) Reihe und

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} w_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k}.$$

**Definition 2.43.** Für beliebiges  $z \in \mathbb{C}$  definieren wir die Exponential-, Cosinus und Sinusfunktion durch

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

**Satz 2.44.** Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  sind  $\exp(z), \cos(z)$  und  $\sin(z)$  als Summe absolut konvergenter Reihen wohldefiniert und erfüllen

- a)  $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$  - bedeutsamste Funktionalgleichung!!
- b)  $\cos(-z) = \cos(z)$  und  $\sin(-z) = -\sin(z)$
- c)  $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$  - die Eulersche Formel, und also  $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)), \sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$ .
- d)  $\forall z \in \mathbb{C} : (\cos(z))^2 + (\sin(z))^2 = 1$ , wenn  $z \in \mathbb{R}$  dann  $\cos(z), \sin(z)$  auch reell und in  $[-1, 1]$ .

**Korollar 2.45.** Additionstheoreme Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$ :

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \quad \& \quad \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w).$$

### 3. FUNKTIONEN - STETIGKEIT UND GRENZWERTE

Wir erinnern an die Definitionen von Abbildungen (siehe auch den Appendix), eine Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ , d.h. in unseren Zahlkörper, nennen wir eine **Funktion** (reelle Funktion).

**Beispiel 3.1.** a)  $|\cdot| : x \mapsto |x|$  *Betragsfunktion auf  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$*

b)  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ ,  $\sqrt{\cdot} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$  *Wurzelfunktion, ihre Inverse ist  $(\sqrt{\cdot})^{-1} = (x \mapsto x^2)|_{\mathbb{R}_+}$*

c)  $[\cdot] : x \in \mathbb{R} \mapsto \max\{l \in \mathbb{Z} : l \leq x\}$ , dann  $[x] \in \mathbb{Z}$  “der ganze Teil” von  $x$  (*Gaussklammer*),  $[\cdot] : x \mapsto x - [x]$  *gebrochene Teil von  $x$ .*

**Definition 3.2.** Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , dann ist  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  *Polynomfunktion* wenn  $\exists n \in \mathbb{N}_0, \exists a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  so dass  $\forall z \in \mathbb{K} : f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  (also  $f(0) = a_0$ ). Die Zahlen  $a_0, \dots, a_n$  sind *Koeffizienten des Polynoms*, wenn  $a_n \neq 0$  dann  $a_n$  *Leitkoeffizient* und  $n = \deg f$  *Grad von  $f$* . Wenn  $\forall n : a_n = 0$  dann  $\deg(0) := -\infty!$  Damit gilt  $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$  für alle Polynome  $f$  und  $g$ . (Wir vereinbaren, dass  $-\infty + k = (-\infty) + (-\infty) =: -\infty$  wenn  $k \in \mathbb{N}_0$ )

**Satz 3.3.** Sei  $f$  ein Polynom mit  $\deg(f) \geq 1$  &  $f(z_0) = 0$  für ein  $z_0 \in \mathbb{K}$ . Dann gibt es ein Polynom  $g$  mit  $\deg(g) = \deg(f) - 1$  &  $(\forall z : f(z) = (z - z_0)g(z))$ .

**Beweisidee:** Polynomdivision — man zeigt zunächst (mit Induktion in  $\deg(f) \geq 1$ )

$\forall z_1 \in \mathbb{K} \exists r_{z_1} \in \mathbb{K} \exists g_{z_1}$  Polynom :  $\deg(g_{z_1}) = \deg(f) - 1$  &  $(\forall z : f(z) = (z - z_1)g_{z_1}(z) + r_{z_1})$ .

Nun  $z_1 = z = z_0 \Rightarrow g = g_{z_0} \& r_{z_0} = 0$ .

**Korollar 3.4.** a)  $\deg(f) = n \geq 0 \Rightarrow \#\{z \in \mathbb{K} : f(z) = 0\} \leq n$ .

b) Sei  $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, g(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$  &  $\#\{z : f(z) = g(z)\} > n$ . Dann

$$(a_0 = b_0) \& (a_1 = b_1) \& \dots \& (a_n = b_n),$$

d.h. die *Polynomkoeffizienten* sind *eindeutig bestimmt* durch die *Polynomfunktion*, da  $\mathbb{K}$  *unendlich*.

Nun wollen wir allgemeine Funktionen (z.B.  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ ) genauer und insbesondere deren analytischen Eigenschaften studieren.

**Definition 3.5.** Sei  $X$  Menge (gewöhnlich  $X \subset \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) mit  $X \neq \emptyset$ , dann

$\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X) = \{f : f : X \rightarrow \mathbb{K}\}$  sind die  $\mathbb{K}$ -wertigen Funktionen auf  $X$ .

Für  $f, g \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X), \lambda \in \mathbb{K}$  definieren wir  $\lambda f, f + g, f \cdot g \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X)$  durch

$$\lambda f : x \mapsto \lambda(f(x)), f + g : x \mapsto f(x) + g(x), f \cdot g : x \mapsto f(x)g(x) \quad \forall x \in X.$$

**Bemerkung:** Somit ist  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X)$  Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit zusätzlicher Operation “Produkt” (heißt dann  $\mathbb{K}$ -Algebra),  $0_{\mathcal{F}} : x \mapsto 0 \forall x \in X$ . Wenn  $\mathbb{K}$  aus dem Kontext klar (oder die Wahl keine Rolle spielt) wird nur  $\mathcal{F}(X)$  geschrieben, meistens reicht es dann aus, den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  zu verstehen.

**Definition 3.6.** Sei  $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$  (oder  $\emptyset \neq X \subset \mathbb{C}$ ) und  $f \in \mathcal{F}(X)$ . Dann sagen wir

- $f$  ist stetig in  $a \in X$  wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ,
- andernfalls ist  $f$  unstetig in  $a$  ( $a \in X$ ),
- $f$  stetig auf  $X$  wenn  $\forall a \in X : f$  stetig in  $a$ . Ansonsten ist  $f$  nicht stetig auf  $X$ .

**Bemerkung 3.7.**  $f \in \mathcal{F}(X), a \in X$ . Dann  $f$  unstetig in  $a \Leftrightarrow \exists \varepsilon_a > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in X : |x - a| < \delta \ \& \ |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_a$ . ( $> \varepsilon'_a$  möglich zu erzielen:  $\varepsilon'_a = \varepsilon_a/2$ ).

**Beispiel 3.8.** a) Betragsfunktion  $|\cdot|$  stetig auf  $\mathbb{R}$ , weil nach ÜZ 2, Aufgabe 2) gilt:  $\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y|$ . Also für festes  $a \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig setze  $\delta = \varepsilon > 0$ , dann  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - a| < \delta$  gilt  $||x| - |a|| \leq |x - a| < \varepsilon$  wie gefordert. Vollkommen analog ist  $|\cdot|$  stetig auf  $\mathbb{C}$ , da in ÜZ 2, A2 nur die  $\Delta$ -Ungleichung benötigt wurde.

- b) ganze Teil  $x \mapsto [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$  unstetig in  $a \in \mathbb{R}$  genau dann wenn  $a \in \mathbb{Z}$  (und dann immer  $\varepsilon_a = 1$  im Sinne von 3.7 wählbar.) Wenn  $a \notin \mathbb{Z}$  betrachte  $M = \{k \in \mathbb{Z} : |k - a| < \frac{1}{2}\}$ . Wenn  $M = \emptyset$  setze  $\delta_a = \frac{1}{2}$  sonst  $\#(M) = 1$  und setze  $\delta_a = |a - k|$  für  $M = \{k\}$ , dieses  $\delta_a$  erfüllt die Forderung in Def 3.6 für alle  $\varepsilon > 0$ !

**Satz 3.9.** Sei  $f \in \mathcal{F}(X), a \in X$ . Dann ist  $f$  stetig in  $a$  genau dann wenn  $\forall (a_n)_n$  Folge in  $X : (\lim_n a_n = a \Rightarrow \lim_n f(a_n) = f(a))$ .

**Bemerkung:** Satz 3.9 kann interpretiert werden als:  $f$  stetig, dann  $\lim_n f(a_n) = f(\lim_n a_n)$ , also "stetige Funktion und (Folgen)Grenzwertübergang sind vertauschbar".

**Korollar 3.10.** Algebra für stetige Funktionen Seien  $f, g \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X)$  beide stetig in  $a \in X$ . Dann sind  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$  alle drei  $\lambda f, f + g, f \cdot g$  stetig in  $a$ .

Wenn ausserdem  $g(a) \neq 0$ , dann  $\exists \delta > 0 \forall x \in X : |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) \neq 0$  und

$$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathcal{F}(X \cap \{x : |x - a| < \delta\}) \text{ ist stetig in } a.$$

**Korollar 3.11.** Sei  $f \in \mathcal{F}(X)$  stetig auf  $X$ . Wenn  $f(X) \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$  dann  $\frac{1}{f} \in \mathcal{F}(X)$  stetig auf  $X$ .

Ein neue Möglichkeit, um stetige Funktionen zu erzeugen ist die Verknüpfung — dies war für Folgen im Allgemeinen nicht möglich, obwohl Ähnlichkeiten zur "=>"-Implikation in Satz 3.9 unübersehbar sein sollten.

**Satz 3.12.** Kettenregel Seien  $f \in \mathcal{F}(X), g \in \mathcal{F}(Y)$  mit  $f(X) \subset Y$ . Wenn  $f$  stetig in  $a \in X$  und  $g$  stetig in  $f(a) \in Y$ , dann ist  $g \circ f \in \mathcal{F}(X)$  stetig in  $a$ .

Vergleiche die Richtung "=>" in Beweis des Satz 3.9.

**Korollar 3.13.** a) Funktionen  $x \mapsto 1, id : x \mapsto x, id \cdot id : x \mapsto x^2$  usw.  $x \mapsto x^k, k \in \mathbb{N}$  sind stetig, also jedes Polynom stetig (auf  $\mathbb{K}$ ).

- b)  $f \in \mathcal{F}(X)$  stetig in  $a \in X$  dann  $|f(\cdot)| : x \mapsto |f(x)|$  auch stetig in  $a$ .

**Beispiel 3.14.** a)  $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \Rightarrow |\exp(z) - 1| \leq 2|z|$

- b)  $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sind stetig auf  $\mathbb{C}$ .

**Definition 3.15.** Für  $X \subset \mathbb{R}$  (oder  $X \subset \mathbb{C}$ ) nichtleer definieren wir

$$C_{\mathbb{K}}(X) = \{f \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(X), f \text{ stetig auf } X\} \quad (C \text{ von "continuous"}).$$

Hier  $X = [a, b]$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ , ein beliebiges abgeschlossenes beschränktes Intervall, besonders interessant, weil jedes  $f \in C([a, b])$  gute "globale" Eigenschaften hat, die im Wesentlichen Konsequenzen des Satzes von Bolzano-Weierstrass 2.18 sind.

**Satz 3.16.** Sei  $f \in C_{\mathbb{R}}([a, b])$ . Dann ist  $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$  beschränkt und

$$\max_{x \in [a, b]} f(x), \min_{x \in [a, b]} f(x) \text{ existieren.}$$

("Maximum und Minimum werden angenommen").

**Beispiel** Sei  $X = (0, 1]$ , dann  $f(x) = \frac{1}{x}$  stetig auf  $X$  aber unbeschränkt von oben, also Abgeschlossenheit des Intervalls wesentlich. Andererseits gilt für  $X = B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; : |z - z_0| \leq r\}$ , ein beliebiger abgeschlossener Kreis in der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  auch das jedes  $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$  sein Maximum und Minimum annimmt.

Weitere gute Eigenschaft stetiger Funktionen: Gleichung  $f(x) = \gamma$  hat (oftmals) Lösungen.

**Satz 3.17.** "Zwischenwertsatz" Sei  $f \in C_{\mathbb{R}}[a, b]$  und  $f(a) < \gamma < f(b)$  (oder  $f(a) > \gamma > f(b)$ ). Dann  $\exists x \in (a, b) : f(x) = \gamma$ .

**Korollar** Sei  $f \in C_{\mathbb{R}}([a, b])$ , dann  $f([a, b]) = [\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x)]$ .

Satz 3.16 und auch Satz 3.17 haben Entsprechungen für bestimmte  $X \subset \mathbb{C}$  (neben den abgeschlossenen Kreisen), mit deren Charakterisierung ierung müssen wir warten, bis wir wichtige Eigenschaften der abgeschlossenen Intervalle allgemeiner verstehen können...als topologische Eigenschaften.

**Beispiel 3.18.** Jedes reelle Polynom  $f$  von ungeradem Grad  $n$  hat eine reelle Nullstelle.

**Definition 3.19.** Ist  $X \subset \mathbb{R} (X \neq \emptyset)$ , dann heißt  $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(X)$

- streng monoton wachsend (bzw. fallend), wenn  $\forall x, y \in X : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$  (bzw.  $f(y) < f(x)$ )
- monoton wachsend (bzw. fallend), wenn  $\forall x, y \in X : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$  (bzw.  $f(y) \leq f(x)$ )

**Beispiel 3.20.**  $\forall x \in (0, 2) : \sin(x) > 0$ . Daraus folgt, dass  $\cos(x)$  strikt monoton fallend in  $[0, 2]$  mit einer einzigen Nullstelle - bezeichnet  $\frac{\pi}{2}$ . Dann  $\sin(\pi/2) = 1$  und  $\forall z \in \mathbb{C} :$

$$\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z) \ \& \ \cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin(z) \Rightarrow \sin(z + \pi) = -\sin(z) \ \& \ \cos(z + \pi) = -\cos(\pi).$$

Eine stetige (reelle) Funktion hat eine stetige Umkehrfunktion (oder gar keine), die Struktur stetiger injektiver reeller Funktionen ist einfach.

**Proposition 3.21.**  $f \in C_{\mathbb{R}}([a, b])$  ist injektiv  $\Leftrightarrow$  ( $f$  ist streng monoton wachsend oder  $f$  ist streng monoton fallend).

**Satz 3.22.** Sei  $f \in C_{\mathbb{R}}([a, b])$  injektiv. Dann  $f^{-1} \in C_{\mathbb{R}}([f(a), f(b)])$  (bzw.  $\in C_{\mathbb{R}}([f(b), f(a)])$ ), falls  $f(a) > f(b)$ .

**Proposition 3.23.**  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend, stetig und  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ .

**Definition 3.24.**  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $(\exp|_{\mathbb{R}})^{-1}$ , die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion.

**Proposition 3.25.** Es gilt

- a)  $\forall x \in \mathbb{R} : \log(\exp(x)) = x, \forall t > 0 : \exp(\log(t)) = t.$
- b)  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, streng monoton wachsend und surjektiv.
- c)  $\forall s, t > 0 : \log(st) = \log(s) + \log(t).$

**Definition 3.26.** Potenzfunktion für reelle Exponenten  $p \in \mathbb{R}$  &  $\forall x > 0 : x^p = \exp(p \cdot \log x)$

**Proposition 3.27.** Definition 3.26 ist eine "Verallgemeinerung" der Potenzen mit ganzem Exponent (aber nur für positive Basis). Es gilt

$$\forall x, y > 0 \forall p, q \in \mathbb{R} : x^p x^q = x^{p+q}, (x^p)^q = x^{pq}, (xy)^p = x^p y^p.$$

**Bemerk.:** Nun können wir auch  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$  einfach definieren (vorher  $\sqrt[n]{x} = \sup\{y \geq 0, y^n \leq x\}$ ).

Es ist oftmals wichtig,  $f(x)$  mit  $x$  nahe  $a$  zu verstehen, auch wenn  $f(a)$  nicht definiert ist (Unterschied zu stetiger Funktion, trotzdem Analogien). Um dieses Verhalten eindeutig zu machen, muss  $f$  auf (vielen) Punkten beliebig nahe zu  $a$  definiert sein.

**Definition 3.28.** Sei  $X \subset \mathbb{K}$ , dann ist  $a \in \mathbb{K}$  ein Häufungspunkt von  $X$ , wenn  $\forall \delta > 0 \#\{x \in X, |x - a| < \delta\} = \infty$ , wir setzen  $X' = \{a \in \mathbb{K}, a \text{ Häufungspunkt von } X\}$ .

**Bemerkung 3.29.**  $a \in X' \Leftrightarrow \forall n : \{x \in X, 0 < |x - a| < \frac{1}{n}\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (a_n)_n \subset X \setminus \{a\} : a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \exists \text{ injektive Folge } (a_n)_n \subset X : a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty.$

**Beispiel 3.30.**

- a)  $\#X < \infty$  ( $X$  endlich)  $\Rightarrow X' = \emptyset$
- b)  $(a, b)' = [a, b]$
- c)  $(\mathbb{Q} \cap (0, 1))' = [0, 1]$

**Definition 3.31.** Wir sagen,  $f$  hat in  $a$  Grenzwert  $\ell$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  oder kurz  $\lim_a f = \ell$ , wenn  $a \in X'$ , wobei  $X = \text{dmn}(f) \subset \mathbb{K}$ , und  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

**Bemerkung:**  $a \in X' \Rightarrow$  Grenzwert  $\ell$  eindeutig, deshalb Grenzwert nur für Häufungspunkte definiert. (Vergleiche Satz 2.3.) Ausserdem sagen wir

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = \ell, \text{ Grenzwert von } f \text{ über } M \text{ in } a \text{ ist } \ell$$

wenn  $\lim_a \tilde{f} = \ell$  wobei  $\tilde{f} = f|_M$ , die Einschränkung von  $f$  auf  $M$ , genauer auf  $M \cap \text{dmn}(f)$ .

**Proposition 3.32.**  $f \in \mathcal{F}(X)$  &  $a \in X', \ell \in \mathbb{K}$ . Dann sind äquivalent

- a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$
- b)  $\forall (x_n)_n \subset X \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \ell$
- c)  $\tilde{f} : X \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in X \setminus \{a\}, \tilde{f}(a) = \ell$  ist stetig in  $a$

**Korollar 3.33.** Algebra für Grenzwerte Wenn  $f, g \in \mathcal{F}(X)$  in  $a \in X'$  Grenzwert haben, dann

- a)  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lim_a \lambda f + g = \lambda \lim_a f + \lim_a g$
- b)  $\lim_a f \cdot g = \lim_a f \cdot \lim_a g$
- c)  $\forall x \in X \setminus \{a\} : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

**Korollar 3.34.** Kettenregeln für Grenzwerte Sei  $f \in \mathcal{F}(X)$ ,  $a \in X'$  &  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ . Dann

- a)  $(g \in \mathcal{F}(Y) \text{ stetig in } \ell \ \& \ f(X) \subset Y) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$  (äußere KR)
- b)  $(h \in \mathcal{F}(Y), b \in Y', \lim_{y \rightarrow b} h(y) = a \text{ und } h(Y \setminus \{b\}) \subset X \setminus \{a\})$   
 $\Rightarrow \lim_{y \rightarrow b} (f \circ h)(y) = \lim_{x \rightarrow a} f = l$ . (innere KR)

**Korollar 3.35.**  $f \in \mathcal{F}(X)$ ,  $a \in X'$  und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \neq 0$ . Dann  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$  (obwohl  $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$  nur auf Teilmenge  $X \cap \{x : f(x) \neq 0\}$  definiert!).

**Beispiel 3.36.** (Grenzwerte von Funktionen, die undefiniert in  $a$  sind)

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin x = 1$  für  $X = \mathbb{C}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  für  $X = \mathbb{R}$  !
- b)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(1/x) - (1/a)}{x - a} = \frac{-1}{a^2}$  für jedes  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,
- c)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$  für alle  $a \in \mathbb{C}$  &  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,
- d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\exp(x) - \exp(a)}{x - a} = \exp(a)$  wenn  $a \in \mathbb{C}$ .

**Beispiel 3.37.** Exponentialfunktion und Eulersche Zahl  $e$   
 Man kann leicht zeigen, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exp\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{n}\right)$$

und beweist daraus, dass

$$\exp(1) = e \quad \text{also} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

wobei die linke Darstellung bedeutend schneller konvergiert. In Zukunft werden wir deshalb die Notation  $\exp(z)$  und  $e^z$  gleichberechtigt verwenden, aber siehe die weiter unten erwähnten Probleme mit komplexen Potenzen.

**Beispiel 3.38.**  $e$  ist irrational.

**Beispiel 3.39.** Die Summe der alternierenden harmonischen Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \dots = \log(2)$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{10} + \dots = \log(2\sqrt{2})$$

Beweis in der Hörsaalübung!

**Bemerkung** Die (konsistente) Definition von komplexen Potenzen ist selbst mit Hilfe der Exponentialfunktion  $\exp$  problematisch. Wir wissen

$$\forall y \in \mathbb{R} \forall p \in \mathbb{R} : (e^y)^p = e^{yp},$$

genauer  $(\exp(y))^p = \exp(yp)$  unter Benutzung der in Definition 3.26 eingeführten stetigen Potenzfunktion  $x > 0 \mapsto x^p$ , und dies erfüllt alle aus der Schule bekannten Regeln für das Rechnen mit Potenzfunktionen.

Wenn wir ähnliches in  $\mathbb{C}$  verlangen passiert folgendes:

$$\exp(0) = 1 = \exp(2\pi i) \Rightarrow (\exp(0))^i = \exp(0i) = 1 = (\exp(2\pi i))^i = \exp(2\pi i^2) = \exp(-2\pi) < 1 \neq 1.$$

Selbst für den gebräuchlicheren Exponent  $p = \frac{1}{2}$  erhält man  $1 = -1!$

Man kann versuchen, dieses Problem zu umgehen, indem man nutzt, dass jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  *eindeutig* als  $z = \exp(r + i\theta)$ ,  $r \in \mathbb{R}$  und  $\theta \in [0, 2\pi)$  geschrieben werden kann, und wir also nur  $\exp(r + i\theta)^p = \exp(rp + i\theta p)$  verlangen wenn  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Selbst dann treten, z.B. für  $p = \frac{1}{2}$  Probleme auf. Sei  $z = \exp(4\pi i/3)$ , dann  $z \cdot z = \exp(8\pi i/3) = \exp(2\pi i/3)$ , also  $z^p z^p = \exp(2\pi i/3) \exp(2\pi i/3) = \exp(4\pi i/3) \neq \exp(\pi i/3) = (z \cdot z)^p$ , also  $(uv)^p \neq u^p v^p$  im Allgemeinen; ausserdem wäre diese Variante der Potenzfunktion z.B. in 1 unstetig. Befriedigende Methoden mit komplexen Potenzen (ausser  $p \in \mathbb{N}$ ) zu arbeiten werden wir erst in der Funktionentheorie kennenlernen.

**Definition 3.40.** (*Bachmann-)*Landau Notation. Sei  $a \in X'$  und  $f, g \in \mathcal{F}(X)$ . Dann sagen wir

$$f = \mathcal{O}(g) \text{ für } x \rightarrow a, \text{ wenn } \exists C \exists \varepsilon > 0 : x \in X \ \& \ 0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|,$$

in Worten:  $f$  ist gross o von  $g$  nahe  $a$ . Analog

$$f = \mathcal{o}(g) \text{ für } x \rightarrow a, \text{ wenn } \forall C > 0 \exists \varepsilon > 0 : x \in X \ \& \ 0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|,$$

in Worten:  $f$  ist klein o von  $g$  nahe  $a$ . Wenn  $g \neq 0$  nahe  $a$ , dann

$$f = \mathcal{o}(g) \text{ für } x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Abschliessen erwähnen wir noch, das für  $X \subset \mathbb{R} \ \infty \in X'$  wenn  $\forall s \in \mathbb{R} \exists x \in X : s < x$  und dann für  $f \in \mathcal{F}(X) \ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{K}$  falls  $\forall \varepsilon > 0 \exists S \in \mathbb{R} : x \in X \ \& \ x > S \Rightarrow |\ell - f(x)| < \varepsilon$ . Uneigentliche Grenzwerte  $\ell = \pm\infty$  definieren wir analog zu uneigentlichen Grenzwerten für Folgen (siehe Übungszettel).

Stetigkeit und Grenzwert sind *lokale* Begriffe, wenn  $\exists \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) = g(x)$ , dann ist  $f$  in  $a$  stetig genau dann wenn  $g$  in  $a$  stetig, und beide haben den gleichen Grenzwert in  $a$ , oder keinen. (Für Grenzwert reicht natürlich  $0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) = g(x)$ ). Wir haben und werden aus solchen lokalen Bedingungen Aussagen über das globale Verhalten von Funktionen herleiten (Beschränktheit, Existenz von Maximum und Minimum, Monotonie usw.).

## 4. DIFFERENTIALRECHNUNG

Wir betrachten Funktionen definiert auf einem (abgeschlossenen oder offenen) Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  ( $I = \mathbb{R}$  auch möglich). Viele Definitionen und Resultate gelten auch für  $I = \mathbb{C}$ , wir werden dies vermerken. Aber für die Anschaulichkeit sollte zunächst  $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(I)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , vorgestellt werden.

**Definition 4.1.**  $f \in \mathcal{F}(I)$  ist differenzierbar in  $a \in I$ , wenn die Ableitung

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

d.h. der Grenzwert der Differenzenquotienten (Sekantenanstiege des Graphen) von  $f$ , in  $\mathbb{R}$  existiert. Wir sagen  $f$  ist differenzierbar auf  $I$  wenn  $f$  in jedem  $a \in I$  differenzierbar ist.

**Bemerkung 4.2.** a) Diese übliche Definition der Ableitung ist äquivalent zur Definition von Caratheodory:  $f'(a) = \ell$  wenn es eine Funktion  $g = g_a \in \mathcal{F}(I)$  gibt, so dass  $g(a) = \ell$ ,  $g$  ist in  $a$  stetig und  $\forall x \in I : f(x) - f(a) = g(x)(x - a)$ . Vergleiche mit Prop 3.32, die zweite und dritte Bedingung bedeuten, dass der Differenzenquotient einen GW (nämlich  $g(a)$ ) hat, und sind also äquivalent zur Existenz der Ableitung. Die erste Bedingung sagt, dass diese Ableitung den Wert  $\ell$  hat.

b) Es gilt  $\ell = f'(a)$  genau dann, wenn die affine Hilfsfunktion  $h_a(x) = f(a) + \ell(x - a)$  die Funktion  $f$  nahe  $a$  "gut" (d.h. von Ordnung höher als eins) approximiert, genauer  $\ell = f'(a) \Leftrightarrow f - h_a = o(x - a)$  für  $x \rightarrow a$ .

**Beispiel 4.3.** a)  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  ist  $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f'_n(a) = na^{n-1} \forall a \in \mathbb{R}$  ( $f_0(a) = 1, f'_0(a) = 0 \forall a$ ),

b)  $f_{-1}(x) = \frac{1}{x}$  ist definiert und differenzierbar auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $f'_{-1}(a) = \frac{-1}{a^2}$ ,

c)  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  mit  $\exp' = \exp$ ,

d)  $\sin, \cos$  sind auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar mit  $\sin'(a) = \cos(a)$  &  $\cos'(a) = -\sin(a)$ .

Diese Resultate gelten auch in  $\mathbb{C}$  bzw.  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , über die komplexe Darstellung des Sinus und Kosinus mittels Exponentialfunktion folgt d) zB. aus c). Die Behauptungen a), b), c) wurden in 3.36 bewiesen.

**Satz 4.4.**  $f \in \mathcal{F}(I)$  differenzierbar in  $a \in I \Rightarrow f$  stetig in  $a$ .

**Warnung:** Diese Implikation ist nicht umkehrbar, z.B.  $f(x) = \sqrt{x}$  in  $0 \in [0, 1]$ .

Ähnlich wie zuvor erhalten wir "algebraische Regeln" für das Rechnen mit Ableitungen. Diese unterscheiden sich für Multiplikation und Division von dem vorher Gewohnten!

**Satz 4.5.** Differentialkalkulus Seien  $f, g \in \mathcal{F}(I)$  beide in  $a \in I$  differenzierbar. Dann

a)  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$

b)  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ . (Produktregel)

Wiederum liefert die Verknüpfung differenzierbarer Funktionen differenzierbare Funktionen, der Beweis erfordert etwas Sorgfalt!

**Satz 4.6.** Kettenregel Seien  $f : I \rightarrow J$ ,  $g \in \mathcal{F}(J)$  und  $I, J \subset \mathbb{R}$  Intervalle. Wenn  $f$  differenzierbar in  $a \in I$  und  $g$  differenzierbar in  $f(a)$ , dann ist  $g \circ f$  differenzierbar in  $a$  mit

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

**Korollar 4.7.** Seien  $f, g \in \mathcal{F}(I)$  beide in  $a \in I$  differenzierbar und sei  $g(a) \neq 0$ . Dann

- a) ist  $\frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{g(x)}$  differenzierbar in  $a$  mit  $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$ ,  
 b) folgt somit aus der Produktregel auch die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

**Bemerkung** Alle in diesem Kapitel bis jetzt bisher formulierten Aussagen gelten auch wenn wir Kreise  $I, J$  in  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $\mathbb{C}$ -wertige Funktionen betrachten, und können in vollkommener Analogie bewiesen werden. Im Weiteren beschränken wir uns, falls nicht anders gesagt, auf  $\mathbb{R}$ -wertige Funktionen auf reellen Intervallen.

**Satz 4.8.** Inverse Funktion Sei  $f \in C((a, b))$  injektiv und differenzierbar mit  $f'(x_0) \neq 0$  in  $x_0 \in (a, b)$ . Dann ist  $f^{-1}$  definiert auf einem offenen Intervall  $J$  mit  $y_0 = f(x_0) \in J$  und ist differenzierbar in  $y_0$ , wobei  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

**Beispiel 4.9.**

- a) Polynom  $p(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$  ist auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar,  $p'(x) = \sum_{k=1}^n k \alpha_k x^{k-1}$ .  
 b)  $\forall n \in \mathbb{Z}$  ist  $f_n : x \mapsto x^n$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  defin. und differenzierbar.,  $f'_n(a) = n a^{n-1} \forall a \neq 0$ .  
 c)  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar auf  $(0, \infty)$  mit  $\log'(a) = 1/a \forall a > 0$ .  
 d)  $\forall p \in \mathbb{R}$  ist  $f_p : x \mapsto x^p$  auf  $(0, \infty)$  definiert und differenzierbar mit  $f'_p(x) = p x^{p-1}$ .

Wir betrachten auch höhere Ableitungen:

**Definition 4.10.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  Intervall, wenn  $\forall a \in I$  die Funktion  $f$  in  $a$  differenzierbar ist, dann ist  $a \mapsto f'(a)$  eine Funktion  $f' \in \mathcal{F}(I)$ . Wenn  $f'$  differenzierbar in  $a \in I$ , dann ist  $(f')'(a) = f''(a)$  die 2. Ableitung von  $f$  in  $a$ .

Allgemeiner:  $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ .

$$C^n(I) = \{f \in \mathcal{F}(I) : f \text{ n-mal differenzierbar} \ \& \ f^{(n)} \in C(I)\}.$$

$$\Rightarrow C(I) = C^0(I) \supset C^1(I) \supset C^2(I) \dots, \text{ setzen } C^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I).$$

**Beispiel 4.11.** •  $f(x) = \exp(x)$ , dann  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  da  $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)} = f$  stetig.

- $g(x) = \frac{1}{x}$  dann  $g \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , weil  $g^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)} \forall x \neq 0$ .
- $h(x) = x|x|$ ,  $h'(x) = 2|x|$  also  $h \in C^1(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$ . Dies kann im Komplexen nicht passieren:  $f \in C^1(\mathbb{C}) \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{C})!!$

Wir betrachten die ursprüngliche Motivation der Differentialrechnung, das Finden von Maximum und Minimum (auf einem offenen Intervall).

**Definition 4.12.** Sei  $f \in \mathcal{F}(X)$ ,  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in X$  ist lokale Maximalstelle (Minimalstelle) von  $f$  wenn  $\exists \delta > 0$  so dass

$$\forall x \in X : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Dann ist  $f(a)$  lokales Maximum (Minimum) von  $f$ .

**Bemerk.:** Wir sagen  $a$  ist lokale Extremstelle wenn  $a$  lokale Minimal- oder lokale Maximalstelle ist. Analog sprechen wir von "striktem Maximum (Minimum)" wenn

$$\exists \delta > 0 \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > f(a) \quad (f(x) < f(a)).$$

**Satz 4.13.** Fermat **Notwendige Bedingung:** Sei  $I$  ein offenes Intervall. Wenn  $x_0 \in I$  eine lokale Extremstelle von  $f \in \mathcal{F}(I)$  und  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, dann  $f'(x_0) = 0$ .

**Definition 4.14.**  $a \in I$  ist kritischer (auch "stationärer" genannt) Punkt von  $f \in \mathcal{F}(I)$  wenn  $f'(a) = 0$ .

**Bemerk.:** Wenn  $I = [0, 1]$  mit  $f(x) = x$  differenzierbar in  $I$ , dann ist **keine** der lokalen Extremstellen  $0, 1$  kritisch. Also  $I$  offen wichtig, sonst Endpunkte gesondert untersuchen.

Funktion  $g(x) = x^3$ ,  $x_0 = 0$  zeigt, dass  $f'(x_0) = 0$  keine *hinreichende* Bedingung für  $x_0$  lokale Extremstelle ist.

**Satz 4.15.** Rolle  $f \in C([a, b])$  und  $f$  auf  $(a, b)$  differenzierbar. Wenn  $f(a) = f(b)$  dann  $\exists x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$ .

**Satz 4.16.** Mittelwertsatz (MWS)  $f \in C([a, b])$  und  $f$  auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann

$$\exists x_0 \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

**Satz 4.17.** Verallgemeinerter MWS  $f, g \in C([a, b])$  und  $f, g$  auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann

$$\exists x_0 \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

Der verallgemeinerte Mittelwertsatz ist u.a. die Grundlage der l'Hospitalschen Regel, siehe unten. Im (normalen) MWS war  $g(x) = x$ . Wir wenden MWS jetzt an, um wieder aus einer lokalen Aussage (über die Ableitung) eine globale (Monotonie) herzuleiten.

**Korollar 4.18.** Sei  $f \in C([a, b])$  und  $f$  auf  $(a, b)$  differenzierbar. Dann

- a)  $(\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow f$  monoton wachsend auf  $[a, b]$ . (Analog  $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$  monoton fallend.)
- b)  $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$  streng monoton wachsend auf  $[a, b]$ .

Die Rückimplikation in b) gilt *nicht*, wie  $x \mapsto x^3$  zeigt. Man kann leicht überprüfen, dass unter der Voraussetzung dieses Korollars  $f$  streng monoton wachsend auf  $[a, b]$  ist, genau dann wenn  $((\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0) \& (\forall x < y \in [a, b] \exists z \in (x, y) : f'(z) > 0))$ .

**Korollar 4.19.** a)  $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists c \forall x \in (a, b) : f(x) = c$ .

b) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f'(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Dann  $f(x) = f(0) \exp(x)$ .

**Beispiel 4.20.** a) Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ -\cos(\frac{1}{x}) + 2x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \end{cases},$$

also  $f$  differenzierbar auf ganz  $\mathbb{R}$  aber  $f'$  nicht stetig! Frage: Gilt der ZWS auch für unstetige Ableitungen?

- b)  $\cos(x) > 0$  auf  $(0, \pi/2)$ , da  $\cos(x) = \cos(-x)$  also  $\sin' > 0$  auf  $(-\pi/2, \pi/2)$  und  $\sin$  streng monoton wachsend auf  $[-\pi/2, \pi/2]$  mit  $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$  (wegen  $\sin(\pi/2) = 1$  und ZWS). Somit existiert stetiges

$$\arcsin = (\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]})^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ monot. wachsend.}$$

$$\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

- c) *Extremstellen*  $\sin, \cos$ : Da  $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$  und  $\cos(x) > 0$  auf  $(-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \cos < 0$  auf  $(\pi/2, 3\pi/2)$  und wegen  $2\pi$ -Periodizität gilt für  $x \in \mathbb{R}$ :  $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Also, wenn  $x$  Extremalstelle von  $\sin$ , dann  $x = (k + \frac{1}{2})\pi$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Wegen  $\sin((2k \pm \frac{1}{2})\pi) = \pm 1$  und  $-1 \leq \sin \leq 1$  sind alle diese Punkte auch genau die (lokalen, aber auch globalen) Extremalstellen des  $\sin$ . Wegen  $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$  erhält man analoge Resultate über  $k\pi, k \in \mathbb{Z}$  als die Nullstellen  $\sin$  und die Extremalstellen des  $\cos$ .
- d) Wir definieren  $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$  für alle  $x \notin \{(k + \frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . Dann ist Tangens  $\pi$ -periodisch und

$$\tan'(x) = 1/(\cos(x))^2 = 1 + (\tan(x))^2 > 0 \text{ wo definiert,}$$

$\tan$  wächst also streng monoton auf jedem Teilintervall seines Definitionsbereiches.

$$\Rightarrow \exists \arctan : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \arctan'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Dies führt dann zu einer Reihendarstellung von  $\arctan$  und  $\pi$ .

**Satz 4.21.** l'Hospitalsche Regel Seien  $f, g$  auf  $(a, b)$ ,  $a < b$  reell, differenzierbar. Unter Benutzung der Notation  $\lim_{x \rightarrow a+} \equiv \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}}$  nehmen wir an, dass

$$\ell_f = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \text{ und } \ell_g = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) \text{ existieren, wobei } (\ell_f, \ell_g) \in \{(0, 0), (\pm\infty, \pm\infty)\}.$$

Dann impliziert  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in [-\infty, \infty]$  auch  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ . (Und  $\exists \varepsilon > 0 : a < x < a + \varepsilon \Rightarrow g(x) \neq 0$ .)

**Bemerk:** Es folgt nun auch leicht (mit Substitution  $y = \frac{1}{x}$ ), dass wenn  $\ell_f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  und  $\ell_g = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ , wobei  $(\ell_f, \ell_g) \in \{(0, 0), (\pm\infty, \pm\infty)\}$ , sowie  $f, g$  auf  $(K, +\infty)$  differenzierbar, dann

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, \infty], \text{ wenn die rechte Seite existiert. (} x \rightarrow -\infty \text{ analog.)}$$

Wir benutzen hierbei die bereits am Ende von Kapitel 3 erwähnten Definitionen uneigentlicher Grenzwerte.

**Definition 4.22.** Sei  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in X'$  und  $f \in \mathcal{F}(X)$ . Dann  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty(-\infty)$  wenn

$$\forall T \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in X : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > T (f(x) < T).$$

Analog, wenn  $(\alpha, \infty) \subset X$ ,  $f \in \mathcal{F}(X)$  dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ wenn } \forall \varepsilon > 0 \exists C : x > C \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty(-\infty) \text{ wenn } \forall T \exists C : x > C \Rightarrow f(x) > T (f(x) < T),$$

mit der entsprechenden Definition von  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**Beispiel 4.23.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = 1$ .

**Korollar 4.24.** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a \in I$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a$  stetig. Wenn  $f$  in  $I \setminus \{a\}$  differenzierbar ist, und  $\lim_a f' = \ell \in \mathbb{R}$ , dann ist  $f$  auch in  $a$  differenzierbar und  $f'(a) = \ell$  (hierbei ist die Ableitung nur einseitig wenn  $a$  ein Endpunkt von  $I$  ist).

Im nun Folgenden werden wir höhere Ableitungen benutzen, um *hinreichende* Bedingungen für lokale Extrema zu finden.

**Satz 4.25.** Sei  $f$  in  $x_0 \in (a, b)$  zweimal differenzierbar mit  $f'(x_0) = 0$ . Dann

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$  ist strikte lokale Minimumstelle von  $f$ ,
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$  ist strikte lokale Maximumstelle von  $f$ ,
- $f''(x_0) = 0$  erlaubt keine Aussage über das Vorliegen einer Extremstelle.

**Definition 4.26.** Ein  $f \in \mathcal{F}(I)$ , mit  $I$  Intervall, ist konvex wenn

$$\forall x, y \in I \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

**Satz 4.27.** Sei  $f \in \mathcal{F}(I)$ , mit  $I = (a, b)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a)  $f$  konvex in  $I$
- b)  $\forall x < y < z$  in  $I$  gilt  $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
- c)  $\forall x \in I \exists l \in \mathbb{R} \forall y \in I : f'(y) \geq f'(x) + l(y - x)$
- d)  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x_1, \dots, x_n \in I \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  gilt die **Jensensche Ungleichung**:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

**Satz 4.28.** Wenn  $f$  differenzierbar im Intervall  $I$  ist, dann ist  $f$  konvex in  $I$  genau dann wenn  $f'$  in  $I$  monoton wächst.

**Korollar 4.29.** Sei  $f$  zweimal differenzierbar in  $I = (a, b)$ . Dann  $f$  konvex genau dann wenn  $\forall x \in I f''(x) \geq 0$ .

**Bemerk:** Wir nennen  $f$  *konkav* wenn  $-f$  konvex ist, d.h. wenn  $\forall x, y \forall \lambda \in (0, 1) : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ . Also wenn die benötigten Ableitungen existieren, gilt  $f$  konkav gdw.  $f'$  monoton fallend gdw.  $f'' \leq 0$ .

**Proposition 4.30.**  $f \in C((a, b))$  und sei  $x_0$  kritischer Punkt von  $f$ . Wenn  $f$  konvex (konkav) auf  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , dann ist  $x_0$  *globale* Minimalstelle (Maximalstelle).

**Beispiel 4.31.** (1)  $\exp$  konvex auf  $\mathbb{R}$ ,  
 (2)  $\alpha \geq 1$  oder  $\alpha \leq 0$  dann  $x \mapsto x^\alpha$  konvex auf  $(0, \infty)$ .  
 (2')  $0 \leq \alpha \leq 1$  dann  $x \mapsto x^\alpha$  konkav auf  $(0, \infty)$ .  
 (3)  $\log$  konkav auf  $(0, \infty)$ .

**Lemma 4.32.** a) Youngsche Ungleichung  $\forall p, q \geq 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und  $\forall x, y \geq 0$  :  
 $x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$ . (Bem.: Wenn  $\alpha > 0$ , dann  $0^\alpha := \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ .)  
 b)  $\forall x, y \geq 0 \forall \alpha > 1$  :  $\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha} \geq \frac{x+y}{2}$ . (Bem.: Wenn  $\alpha < 0$ , dann analog  $\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha} \geq \frac{x+y}{2}$ . Es folgt  $\alpha \mapsto \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}$  wachsend auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ausserdem,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha} = \sqrt{ab}$ .)

**Satz 4.33.** Höldersche Ungleichung Für alle  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  und für alle

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C} \text{ gilt } \sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Für  $p = q = 2$  ist dies die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: das Skalarprodukt zweier Vektoren (im  $n$ -dimensionalen Raum) ist kleiner gleich dem Produkt der Längen der Vektoren.

Nun wollen wir höhere als die 2. Ableitung betrachten, diese beschreiben das Verhalten einer Funktion nahe eines Punktes, indem sie ein sehr gut approximierendes Polynom, das Taylorsche Polynom liefern. Diese Approximation ist wichtig, da sich eigentlich nur Polynome für allgemeines  $x \in \mathbb{R}$  effektiv berechnen lassen - aber besonders interessante Funktionen oftmals (zusammen mit ihren Ableitungen) einfach in speziellen Punkten berechenbar sind.

Die naive Idee ist wie folgt: Wenn ein gegebenes  $f \in \mathcal{F}((-\delta, \delta))$  ein Polynom  $p$  ist, dann können wir dessen Koeffizienten aus den Ableitungen von  $f$  in 0 ablesen. In der Tat, falls  $p(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$ , dann  $\alpha_0 = p(0) = f(0)$ . Weiterhin  $f'(0) = p'(0) = \sum_{k=0}^n k \alpha_k x^k|_{x=0} = \alpha_1$ ,

$$f''(0) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \alpha_k x^k|_{x=0} = 1 \cdot 2 \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2},$$

$$\text{Analog } \alpha_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \forall k \leq n \text{ und } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Wenn  $f$  also ein Polynom ist, ist es durch seine Ableitungen im sogenannten "Entwicklungspunkt" (hier die Null) vollständig bestimmt. Wir beantworten nun die Frage, was passiert, wenn  $f$  kein Polynom, aber wenigstens genügend oft differenzierbar ist, und betrachten hierbei auch einen allgemeinen Entwicklungspunkt.

**Satz 4.34.** Taylorsche Formel Sei  $f \in C^n([c, d])$  und  $a \in (c, d)$ . Wenn  $f^{(n)}$  differenzierbar auf  $(c, d)$ , dann haben wir für den Entwicklungspunkt  $a$

$$\forall x \in (c, d) : f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x; a), \quad \text{man nennt } T_n^f(x; a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

das Taylorpolynom  $n$ -ter Ordnung für  $f$  im Entwicklungspunkt  $a$  und das Restglied  $R_n(x; a) = R_n^f(x; a)$  kann auf folgende 2 Arten dargestellt werden

- $\exists \xi \in (a, x)$  (bzw.  $\xi \in (x, a)$ ) mit  $R_n(x; a) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-a)^{n+1}$  Lagrangeform.
- $\exists \eta \in (a, x)$  (bzw.  $\eta \in (x, a)$ ) mit  $R_n(x; a) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\eta) (x-\eta)^n (x-a)$  Cauchyform

**Bemerkung:** Entscheidende Beweisidee - Variation des Entwicklungspunktes  $a$  in  $R_n(x; a)$ !

**Beispiel 4.35.** Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}.$$

Dann  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  und  $\forall n : f^{(n)}(0) = 0$ . Aber  $\forall x \neq 0 : f(x) \neq 0$ , also  $R_n(x; 0) \not\rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , d.h. Taylorsche Polynome konvergieren nirgends (außer im Entwicklungspunkt) gegen die Funktion.

**Proposition 4.36.** Sei  $f \in C^\infty((c, d))$ , und möge ein  $N$  existieren mit

$$\sup_{n \geq N} \sup_{x \in (c, d)} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}} = H \in (0, \infty),$$

wenn  $H = 0$  dann  $f^{(N)} \equiv 0$  und  $f$  Polynom gleich seinem  $N$ -ten Taylorschen Polynom.

Dann gilt

$$\forall a \in (c, d) \forall x \in (c, d) \cap \left(a - \frac{1}{H}, a + \frac{1}{H}\right) : \quad \boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k} \quad (*)$$

wobei diese Taylorsche Reihe (\*) sogar absolut konvergiert.

Der Beweis ist eine simple Anwendung der Lagrangeform des Restgliedes. Das folgende Beispiel zeigt, dass beide Formen der Restglieder in Satz 4.34 ihre Berechtigung haben, da sie in unterschiedlichen Punkten gute (d.h. mit  $n$  gegen Null konvergierende) Abschätzungen des absoluten Fehlers  $|R_n(x, a)|$  liefern.

**Beispiel 4.37.** Wir betrachten

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad (*)$$

Dann gilt (\*) genau dann wenn  $x \in (-1, 1]$ , wobei (\*) für  $x \in [-1/2, 1]$  aus der Lagrangeform des  $R_n(x; 0)$  folgt, und für  $x \in (-1, 1)$  die Cauchyform (\*) beweist.

Insbesondere gilt (für  $x = 1$ ):  $\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$  ist die Summe der alternierenden harmonischen Reihe.

In der Tat gilt mit  $f(x) = \log(1+x)$  für die Entwicklung in der 0, dass  $f^{(0)}(0) = 0$ ,  $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k} \forall x > -1 \forall k \in \mathbb{N}$ . Also  $\log(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = R_n(x, 0)$  und (\*)  $\Leftrightarrow \lim_n R_n(x; 0) = 0$ . In der Abschätzung des Restgliedes  $R_n(x, 0)$  ist das Verhalten von  $f^{(n+1)}(\xi)$  (bzw.  $f^{(n+1)}(\eta)$ ) entscheidend, auf  $[0, 1]$  problemlos da durch  $n!$  beschränkt (aber auch keine bessere Abschätzung da  $\xi, \eta$  beliebig nahe bei 0 sein könnten). Aber auf  $(-1, 0]$ , d.h. für  $x < 0$ , treten Schwierigkeiten auf da  $|f^{(n+1)}(y)| \rightarrow \infty$  wenn  $y \rightarrow -1$ . Die beiden Restgliedformen geben nun im Einzelnen

- Lagrangeform:  $|R_n(x; 0)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} (-1)^{n+2} n! \left( \frac{x-0}{1+\xi} \right)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \forall x \in [0, 1]$ ,

da dann  $\xi \in (0, x)$  also  $1+\xi > 1$ . Somit  $\forall x \in [0, 1] : (*)$ . Auch  $\forall x \in [-1/2, 0) : 1+\xi > 1+x \geq 1/2 \geq |x|$ , also  $|x/(1+\xi)| \leq 1$  und (\*) folgt. Aber wenn  $-1 < x < -1/2$ , dann kann  $\xi < -1/2$  gelten, also  $0 < 1+\xi < 1/2 < |x|$  und  $|x/(1+\xi)| > 1$ . Somit ist  $|R_n(x, 0)| \rightarrow \infty$  durch die Lagrangeform nicht auszuschliessen und (\*) kann nicht gezeigt werden.

- Cauchyform:  $|R_n(x; 0)| = \left| \frac{1}{n!} (-1)^{n+2} n! \frac{x(x-\eta)^n}{(1+\eta)^{n+1}} \right| = \left| \frac{x}{1+\eta} \right| \left| \frac{x-\eta}{1+\eta} \right|^n$ . Somit  $|R_n(x, 0)| \leq |x|^{n+1}$  wenn  $x > 0$  da dann  $0 < x-\eta < x$  &  $1 < 1+\eta$ . Also (\*) folgt für alle  $x \in [0, 1)$ , allerdings für  $x = 1$  kann  $\eta \in (0, 1)$  sehr nahe an 0 sein, dann unklar ob  $|R_n(x, 0)| \rightarrow 0$  dh. die Cauchyform kann (\*) für  $x = +1$  nicht zeigen. Wenn jedoch  $-1 < x < 0$  dann  $|x-\eta| = \eta - x = (\eta+1) - (x+1)$  und  $\frac{|x-\eta|}{|1+\eta|} = 1 - \frac{x+1}{1+\eta} \leq 1 - (x+1) \leq -x \leq |x| < 1$ . Deshalb  $R_n(x, 0) \rightarrow 0$  und (\*) gilt.

Weil  $|x| > 1 \Rightarrow \lim_k \left| \frac{1}{k} x^k \right| = +\infty$  und weil für  $x = -1$  die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)}}{k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k}$  divergent, gilt (\*) genau dann wenn  $x \in (-1, 1]$ .

Abschließend diskutieren wir noch einige praktische (Rechen)Regeln zum Finden von und Arbeiten mit Taylorpolynomen, diese sind nicht immer am Einfachsten durch gedankenloses Differenzieren zu finden.

Zuerst die theoretische Grundlage, diesmal fragen wir nicht, wie gut  $T_n^f(x; a)$  den wahren Funktionswert  $f(x)$  annähert wenn  $n \rightarrow \infty$ , sondern wir gut  $T_n^f(\cdot; a)$  die Funktion  $f$  nahe dem EP  $a$  (aber für fixes  $n$  annähert).

**Proposition 4.38.** i)  $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (c, d)$  und die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}(a)$  existiert. Dann

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^f(x; a)}{(x - a)^n} = 0.$$

ii) Seien  $p_1, p_2$  Polynome vom Grade kleiner gleich  $n$  und

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{p_1(x) - p_2(x)}{(x - a)^n} = 0 \text{ oder } \lim_{x \rightarrow a-} \frac{p_1(x) - p_2(x)}{(x - a)^n} = 0,$$

dann  $p_1 \equiv p_2$ , d.h die Polynome sind gleich.

Der Beweis der i) nutzt die beiden einfachen Fakten  $(T_n^f(x; a))' = T_{n-1}^{f'}(x; a)$  und

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^f(x; a)}{(x - a)^n} = \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f')(x) - (T_n^f(x; a))'}{(x - a)^{n-1}},$$

wenn die RS existiert sowie Induktion in  $n \in \mathbb{N}$  der Falle  $n = 1$  folgt aus der (Definition der) Differenzierbarkeit von  $f$  in  $a$ .

**Korollar 4.39.**  $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in (c, d)$  und die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}(a)$  existiert. Dann gilt für das Polynom  $p$  mit  $\deg(p) \leq n$ , dass  $T_n^f(\cdot; a) = p$  genau dann wenn  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)^{-n} (f(x) - p(x)) = 0$ , einseitige GW in  $a$  reichen auch.

Die nachfolgenden Ergebnisse formulieren wir für den Entwicklungspunkt  $a = 0$ , sie lassen sich durch "Verschieben", d.h. die Substitution  $x = a + y$  auch auf andere EP übertragen. Wir können dann sehr elegant und effizient mit der Bachmann-Landau Notation arbeiten, siehe Ende Kapitel 3, die wir hier schnell mit ihren, sehr natürlichen Eigenschaften, wiederholen. Sei  $a \in X'$  und  $f, g \in \mathcal{F}(X)$ . Dann sagen wir

$$f = \mathcal{O}(g) \text{ für } x \rightarrow a, \text{ wenn } \exists C \exists \varepsilon > 0 : x \in X \ \& \ 0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|,$$

in Worten:  $f$  ist gross o von  $g$  nahe  $a$ . Analog

$$f = \mathcal{o}(g) \text{ für } x \rightarrow a, \text{ wenn } \forall C > 0 \exists \varepsilon > 0 : x \in X \ \& \ 0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|,$$

in Worten:  $f$  ist klein o von  $g$  nahe  $a$ . Wenn  $g \neq 0$  nahe  $a$ , dann

$$f = \mathcal{o}(g) \text{ für } x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Speziell mit  $g(x) = x^n$  und  $a = 0$  erhalten wir (aus der Algebra für GW) sofort

$$f = \mathcal{O}(x^k) \text{ für } x \rightarrow 0 \Rightarrow f = \mathcal{O}(x^k) \text{ für } x \rightarrow 0 \text{ und,}$$

$$f = \mathcal{O}(x^k) \text{ für } x \rightarrow 0 \Rightarrow f = \mathcal{O}(x^l) \text{ für } x \rightarrow 0 \text{ wenn } l < k \text{ aus } \mathbb{Z} \text{ (wobei } x^0 \equiv 1 \text{ da } x \neq 0).$$

$f = \mathcal{O}(x^k), g = \mathcal{O}(x^k)$  für  $x \rightarrow 0$  und  $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda f + g = \mathcal{O}(x^k)$  für  $x \rightarrow 0$ , analog für  $\mathcal{O}$ ,  
 $f = \mathcal{O}(x^k)$  und  $g = \mathcal{O}(x^l)$  für  $x \rightarrow 0 \Rightarrow f \cdot g = \mathcal{O}(x^{k+l})$  für  $x \rightarrow 0$ , wobei  $l, k \in \mathbb{Z}$ .

Das Analoge gilt auch für  $\mathcal{O}$ , und lässt sich sehr anschaulich schreiben  $\mathcal{O}(x^l) \cdot \mathcal{O}(x^k) = \mathcal{O}(x^{l+k})$  wenn  $x \rightarrow 0$  geschrieben. Natürlich erhält man daraus auch  $(\mathcal{O}(x^n))^m = \mathcal{O}(x^{mn})$  wenn  $x \rightarrow 0$  usw.

**Korollar 4.40.** Seien nun  $f, g, f_1, f_2$  genügend oft differenzierbar, z.B. in  $C^\infty$

- i) wenn  $p_i = T_n^{f_i}(\cdot; 0)$  dann  $p_1 + p_2 = T_n^{f_1+f_2}(\cdot; 0)$
- ii) wenn  $p_i = T_n^{f_i}(\cdot; 0)$  dann  $p = T_n^{f_1 f_2}(\cdot, 0)$  wobei  $p$  aus dem Polynom  $p_1 p_2$  entsteht, indem man alle Glieder der Ordnung größer  $n$  weglässt.
- iii)  $p = T_n^f(\cdot, 0)$  gdw  $(p(0) = f(0)$  und  $p' = T_{n-1}^{f'}(\cdot, 0)$ ).
- iv)  $p = T_n^f(\cdot, 0)$ , dann für alle  $k \in \mathbb{N}$  natürlich ist  $q : y \rightarrow p(y^k)$  genau  $T_m^g(\cdot, 0)$  wobei  $g : y \rightarrow f(y^k)$  und  $m = (n+1)k - 1$

In diesem Korollar sind i) und iii) einfach direkt aus der Definition der (Koeffizienten der) Taylorpolynome herzuleiten. Für ii) nutzen wir, dass  $\Delta_i = f_i - p_i = \mathcal{O}(x^n)$  wenn  $x \rightarrow 0$ , also

$$f_1 f_2 - p_1 p_2 = (p_1 + \Delta_1)(p_2 + \Delta_2) - p_1 p_2 = p_1 \Delta_2 + \Delta_1 p_2 + \Delta_1 \Delta_2 = \mathcal{O}(x^n) \text{ wenn } x \rightarrow 0.$$

Für iv) nutzen wir, dass unter unseren Annahmen, d.h.  $f^{(n+1)}$  stetig nahe 0 aus der Lagrange-Restgliedform folgt, dass  $f - p = \mathcal{O}(x^{n+1})$  wenn  $x \rightarrow 0$  und also

$$g(y) - q(y) = f(y^k) - p(y^k) = \mathcal{O}((y^k)^{n+1}) = \mathcal{O}(y^{k(n+1)}) = \mathcal{O}(y^{k(n+1)-1}) \text{ wenn } y \rightarrow 0,$$

denn dann auch  $y^k \rightarrow 0$ . Da  $\deg(q) \leq k \deg(p) \leq kn \leq k(n+1) - 1$  folgt die Behauptung aus Korollar 4.39.

**Beispiel 4.41.** Gesucht ist das Taylorpolynom vom Grad 5 für  $f(x) = (\cos(x^2) - (\cos(x))^2)$  im EP  $a = 0$ .

Wir wissen  $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$  für alle  $x$ , und es ist leicht zu sehen, dass diese Reihe alternierend ist, (d.h. Betrag der Glieder nimmt monoton ab), also

$$\left| \cos(y) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \right| < \frac{x^6}{6!} = \mathcal{O}(x^5) \text{ wenn } x \rightarrow 0.$$

Also  $T_5^{\cos}(x, 0) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ , damit sofort

$$T_{11}^{\cos(x^2)}(x, 0) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24}, \text{ also } T_5^{\cos(x^2)}(x, 0) = 1 - \frac{x^4}{2}.$$

Ausserdem

$$(\cos(x))^2 = \left[ \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \mathcal{O}(x^5) \right]^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \mathcal{O}(x^5) = 1 + \frac{x^4}{4} - 2 \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5),$$

wie man leicht sieht sind alle "weggelassen" Terme die nach dem Binomischen Satz bzw. beim Ausmultiplizieren der Klammer mit sich selbst auftreten  $\mathcal{O}(x^5)$ . Somit

$$T_5^{(\cos)^2}(x, 0) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} \Rightarrow T_5^f(x; 0) = T_5^{\cos(x^2)}(x, 0) - T_5^{(\cos)^2}(x, 0) = x^2 - \frac{5}{6}x^4.$$

## APPENDIX A. NOTATIONEN

Wir werden die hier zusammengetragenen Begriffe und Symbole in der Vorlesung jeweils bei Bedarf einführen, dieses Kapitel dient also zur nochmaligen Übersicht.

**Definition A.1. Menge** (*intuitive Definition von G. Cantor*) ist die Zusammenfassung von Objekten (Elementen), die eine bestimmte Eigenschaft (“ $P(x)$  gilt”) haben.

Wir schreiben  $x \in M$  wenn  $x$  ein Element von  $M$  ist, d.h. zu  $M$  gehört, und  $x \notin M$  andernfalls.

Typischerweise studieren wir  $\{x \in X : P(x)\}$ , d.h. die Menge aller  $x$  aus einer (grossen fixen “Universal-”)Menge  $X$ , für die die (mathematische) Aussage  $P(x)$  wahr ist.

Wir sagen  $M$  ist Teilmenge von  $N$  (Notation  $M \subset N$ ), wenn alle Elemente von  $M$  auch zu  $N$  gehören, zwei Mengen sind gleich wenn sie genau die gleichen Elemente haben. (Statt  $M$  Teilmenge von  $N$  sagen wir oft  $M$  ist kleiner (oder auch kleiner gleich)  $N$ ). Analog zur Ordnungsrelation für reelle Zahlen ist  $M \subset N$  gleichbedeutend mit  $N \supset M$ . wir schreiben  $M \subsetneq N$  wenn  $M \subset N$  und  $M \neq N$  und sagen  $M$  ist *strikt* kleiner als  $N$ .

Aus gegebenen Mengen  $M, N$  konstruieren wir

- $M \cap N = \{x : x \in M \ \& \ x \in N\}$  Schnittmenge, Durchschnitt von  $M$  und  $N$
- $M \cup N = \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$  Vereinigung
- $M \setminus N = \{x : x \in M \ \& \ x \notin N\}$  Differenzmenge
- $M \times N = \{(x, y) : x \in M \ \& \ y \in N\}$  Produktmenge, wobei  $(x, y) = (x', y')$  genau dann wenn  $x = x'$  und  $y = y'$  - geordnete Paare
- $\mathfrak{P}(M) = \{N : N \subset M\}$  die Potenzmenge von  $M$

Spezielle Notation ist reserviert für

- $\emptyset$  leere Menge, enthält *kein* Element
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \ \& \ n \in \mathbb{N}\}$  rationale Zahlen
- $\mathbb{R}$  reellen Zahlen

*Warnung:*  $\{\emptyset\} \neq \emptyset!$

Ausserdem bezeichnen wir Intervalle von ganzen oder reellen Zahlen durch die üblichen Notationen (die später flexibler gehandhabt werden):

- $\{k, \dots, m\} = \{l \in \mathbb{Z} : k \leq l \leq m\}$  wenn  $k, m \in \mathbb{Z}$ , das ist eine Teilmenge von  $\mathbb{N}_0$  bzw.  $\mathbb{N}$  wenn  $k \in \mathbb{N}_0$  bzw.  $k \in \mathbb{N}$ ,
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  offenes Intervall für  $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , wobei wir  $\pm\infty$  nicht als Teil des (algebraischen) Körpers  $\mathbb{R}$  betrachten können, aber annehmen, dass  $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty$ .
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  rechts offenes (halboffenes) Intervall für  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  links offenes (halboffenes) Intervall für  $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R}$ .

**Definition A.2. Quantifikatoren** Wir benutzen die Abkürzungen

- $\forall x \dots$  bedeutet “für alle  $x$  gilt  $\dots$ ”
- $\exists x \dots$  bedeutet “es gibt ein  $x$  so dass  $\dots$ ”

Weitere (logische und andere) Symbole:

- $\&$  für “und”
- $\Rightarrow$  für “impliziert” und auch  $\curvearrowright$  im sehr ähnlichen Sinne von “also”
- $\Leftrightarrow$  für “genau dann wenn”
- $\nexists$  für “Widerspruch” (erzielt)
- $\#$  für Kardinalität, dh. Anzahl der Elemente einer Menge
- $\odot, \square$  für q.e.d, d.h. Beweis beendet
- $\diamond$  für Warnung

**Definition A.3. Abbildungen**

Seien  $X, Y$  Mengen. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  (von  $X$  nach  $Y$ , “ $f$  bildet  $X$  nach/in  $Y$  ab”) ist eine Vorschrift, die jedem  $x \in X$  ein  $y \in Y$  zuordnet. Notation  $f : x \mapsto f(x)$ .

(Vergleiche  $X = \mathbb{N}$ ,  $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  reelle, komplexe Folge  $(a_n), (z_n)$ .)

$f(x)$  ist das Bild von  $x \in X$  unter  $f$ ,  $x$  ein Urbild von  $f(x)$  unter  $f$  (mehrere Urbilder möglich:  $f(x) = x^2$ ,  $f(-1) = f(1) = 1$ ).

$X = \text{dmn}(f)$  der Definitionsbereich von  $f$  (engl. domain)

$f(X) = \{f(x) : x \in X\} = \text{im}(f)$  Bild oder Wertebereich von  $f$  (engl. image)

Für  $M \subset X$  definieren wir Einschränkung  $f|_M : M \rightarrow Y$  von  $f$  auf  $M$  durch  $f|_M : x \mapsto f(x)$  für  $x \in M$ .

Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist

- injektiv (oder 1-1) wenn  $\forall x, y \in X : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- surjektiv ( $f$  von  $X$  auf  $Y$ ):  $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
- bijektiv ( $f$  Bijektion) wenn  $f$  injektiv und surjektiv

$id_X : X \rightarrow X$  mit  $id_X(x) = x \forall x \in X$  “einfachste” Bijektion, strikt wachsende(fallende) Folgen  $a_n < a_{n+1}$  ( $a_n > a_{n+1}$ ) sind injektiv.

Wenn  $f : X \rightarrow Y$  Bijektion dann definieren wir mit  $f^{-1} : y \in Y \mapsto x \in X$ , wobei  $f(x) = y$ , die inverse oder Umkehrabbildung von  $f$ .

Wenn  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen, dann definieren wir die Verknüpfung  $g \circ f : X \rightarrow Z$  von  $g$  mit  $f$  durch  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \forall x \in X$ .

Bemerkung: Wenn  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  existiert, dann  $(f^{-1}) \circ f = id_X$  und  $f \circ (f^{-1}) = id_Y$ .

Graph von  $f$  is  $G(f) = \{(x, f(x)), x \in X\} \subset X \times Y$ . (Für Liebhaber der Mengentheorie ist eine Abbildung eine Menge  $M \subset X \times Y$ , so dass  $\forall x \in X$  genau ein  $y \in Y$  mit  $(x, y) \in M$  existiert, dies erspart den nichtmathematischen Begriff “Vorschrift”. Also ist  $f$  dann eigentlich durch  $G(f)$  definiert.) Der Graph enthält oft oft viele geometrische Informationen, die (besonders wenn  $X, Y = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R}^2$ ) es erlauben analytische Eigenschaften von  $f$  einfacher zu erkennen.