Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Dr. Jonas Hirsch
Dr. Dominik Inauen

WS2019/20

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 2

Aufgabe 1

(i) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} -u_x + 5u_y = \sin(xy) & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = \cos(x) & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}\,. \end{cases}$$

Ist die Lösung eine klassische Lösung? Ist sie eindeutig? Begründen Sie kurz ihre Lösung.

(ii) Hat das folgende Anfangswertproblem eine klassische Lösung?

$$\begin{cases} -u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = \cos(x) & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}\,. \end{cases}$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie die folgende Spezialversion der *coarea formula*. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für jedes $R > 0$

$$\int_{B_R} f(x)\,dx = \int_0^R \left(\int_{\partial B_r} f\,dS \right) dr = \int_0^R r^{1-n} \left(\int_{\partial B_1} f_r\,dS \right) dr\,,$$

wobei $f_r(x) := f(rx)$ und $\int_{\partial B_r} f\,dS$ das Oberflächenintegral über die C^1-Hyperfläche ∂B_r bezeichnet.

Tipp: Unterteilen Sie $B_R = B_R^+ \cup B_R^- \cup \big(B_R \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\big)$ und wenden Sie den Transformationssatz auf eine geeignete Parametrisierung von B_R^+ bzw. B_R^- an.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass die Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ rotationsinvariant ist, d.h. sei $O \in O(n)$ eine orthogonale Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ und

$$v(x) := u(Ox)\,.$$

Zeigen Sie nun, dass $\Delta v = 0$ genau dann wenn $\Delta u = 0$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie wie in Aufgabe 3, dass die Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\Big(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\Big) = 0$$

rotationsinvariant ist und finden Sie eine rotationsinvariante Lösung.