Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Dr. Jonas Hirsch
Dr. Dominik Inauen

WS2019/20

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 3

Aufgabe 1

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte C^1-reguläre Menge und sei ν die äußere Normale zu ∂U. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F(x) := \int_{\partial U} \frac{(x-y)\cdot \nu(y)}{|x-y|^n}\, dS(y) \tag{1}$$

für alle $x \notin \partial U$ wohldefiniert ist und

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin U \\ -n\omega_n & \text{für } x \in U, \end{cases} \tag{2}$$

wobei ω_n das Volumen des n-dimensionalen Einheitsballes bezeichnet.

Aufgabe 2

Sei $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und f messbar und beschränkt mit kompaktem Träger, d.h. $\mathrm{spt}(f) \subset B_R$ für ein $R > 0$.

1. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$F(x) := g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x-y)\, dy$$
wohldefiniert und stetig ist und $|F(x)| \le \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1(B_R(x))}$ erfüllt.
2. Zeigen Sie, dass die Operation $*$ linear und symmetrisch ist, d.h. $g * f = f * g$ und $f * (g+h) = f * g + f * h$ für $g, h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
3. Zeigen Sie weiter, dass falls $f \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, dann ist $g * f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ mit
$$D^\alpha (g * f)(x) = g * (D^\alpha f)(x)\,.$$

Aufgabe 3

Sei $u \in C^2(B_r(0)) \cap C^0(\overline{B_r(0)})$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } B_r(0) \\ u &= g \text{ auf } \partial B_r(0)\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$u(0) = \fint_{\partial B_r(0)} u\, dS + \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{B_r(0)} \left(|x|^{2-n} - r^{2-n}\right) f\, dx\,.$$

Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis zur Mittelwertseigenschaft von harmonischen Funktionen.

Aufgabe 4*

Seien $0 < r_1 < r_2 < \infty$ und definiere $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : r_1 < |x| < r_2\}$. Sei nun $f \in L^1(A)$ eine rotationsinvariante Funktion, d.h. d.h. $f(Ox) = f(x)$ für alle $x \in A$ und alle $O \in O(3)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_A \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy = \begin{cases} \text{konst.} & \text{für } |x| < r_1 \\ \frac{m}{|x|} & \text{für } |x| > r_2\,, \end{cases}$$

wobei $m = \int_A f\, dx$.