

10. Übung zur Vorlesung Analysis  
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Dienstag, 7.1.2020

Abgabe: Dienstag, 14.1.2020 in der Vorlesung oder bis spätestens 13:00 Uhr  
im Postfach Hardtke (die Postfächer befinden sich im Raum A 514).

**Wichtig:** Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin  
und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig  
bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

**Aufgabe 1** (1+1+1+1 Punkte). Berechnen Sie die folgenden Integrale.  
Geben Sie Ihren Rechenweg mit an und vereinfachen Sie das Ergebnis noch  
so weit wie möglich.

$$(a) \int_0^1 x^2 \cos(x^3 - 2) dx$$

$$(b) \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$(c) \int_0^\pi x \sin(5x) dx$$

$$(d) \int_0^1 x e^{3x} dx$$

**Aufgabe 2** (2+2 Punkte). Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen  
Integrale (geben Sie ihren Rechenweg mit an).

$$(a) \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$$

$$(b) \int_0^\infty x e^{-x^2} dx$$

**Aufgabe 3** (2 Punkte). Seien  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  und  $x \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie

$$\int_0^x \sin^n(t) dt = \frac{n-1}{n} \int_0^x \sin^{n-2}(t) dt - \frac{1}{n} \cos(x) \sin^{n-1}(x).$$

**Aufgabe 4** (2+2 Punkte). Sei  $a > 0$  und sei  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion.

1) Es gelte  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in [-a, a]$  (solche Funktionen nennt man ungerade). Zeigen Sie

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

2) Es gelte  $f(-x) = f(x)$  für alle  $x \in [-a, a]$  (solche Funktionen nennt man gerade). Zeigen Sie

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

**Aufgabe 5** (2 Punkte). Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei gleichmäßig stetige und beschränkte Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch das Produkt  $fg$  gleichmäßig stetig ist.