Übungsblatt 5

1) a) Bestimmen Sie Menge

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2 \right\},$$

das heißt, leiten Sie eine exakte Beschreibung (auch im Sinne der Schulmathematik) her. 3 Punkte

b) Skizzieren Sie die durch

$$M_2 = \{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z-1| + |z+1| < 8 \}$$

beschriebene Menge komplexer Zahlen und geben Sie deren geometrischen Klassifizierung (im Sinne der Schulgeometrie) an. 2 Punkte

2) Zeigen Sie, dass a, b, c in der komplexen Zahlenebene ein (möglicherweise degeneriertes) gleichseitiges Dreieck bilden genau dann, wenn

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

[Hinweis: es kann einfacher sein, zuerst den Spezialfall $a = 0$ und $b = 1$ zu betrachten. Klären Sie dann, unter welchen Transformation der Ebene das Problem invariant ist, und behandeln Sie so den allgemeinen Fall.] 5 Punkte

3) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie,

a) wenn f injektiv ist und $M \subset \mathrm{dom}(f)$ dann ist $f_{|M}$ injektiv,

b) $g \circ f$ ist injektiv genau dann wenn (f ist injektiv und $g_{|\mathrm{im}(f)}$ ist injektiv),

c) falls $X = X_1 \cup X_2$, $f(X_1) \cap f(X_2) = \emptyset$ und beide Abbildungen $f_{|X_1}$ sowie $f_{|X_2}$ sind injektiv, dann ist auch f injektiv. "Ist die Disjunktheitsannahme notwendig?" 1+2+2 Punkte

4) Sei $M \subset \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass folgende 3 Aussagen äquivalent sind

a) M ist nicht endlich.

b) Es gibt eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$.

c) Es gibt ein $\Phi : M \to M$, das injektiv aber nicht surjektiv ist.

[Hinweis: Für b) zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Minimum m_n der Menge $\{m \in M \ : \ \#(M \cap \{1, \ldots, m\}) = n\}$ existiert und dass $M = \{m_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ gilt.]

5 Punkte

Abgabe: am 21.11.2019, 17.10 Uhr Hörsaal 9