Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 17. Oktober 2019

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 3 für Physiker

Blatt 1

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei A die Menge

$$A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, y \geq x^2 \text{ und } x \geq y^2 \right\}.$$

Bestimme die Fläche von A, das heißt $\lambda^2(A)$.

Berechne

$$\int_A (x^2+y^2)\mathrm{d}\lambda^2(x,y).$$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Seien $g, h : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ integrierbare Funktionen. Zeige, dass falls $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ messbar ist und $|f(x,y)| \leq g(x)h(y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt, dann gilt

$$\int f(x,y)\mathrm{d}\lambda^2(x,y) = \int \int f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Aufgabe 3 (3 Punkte). Berechne das Volumen (λ^3) eines Ellipsoids mit den Halbachsen a, b und c, also der Menge

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Hinweis: transformiere auf geeignet gewählte Koordinaten.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ eine Funktion und K der von dieser Funktion erzeugte Rotationskörper, das heißt

$$K := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\, x^2+y^2 \leq f(z)^2 \right\}.$$

Zeige

$$\lambda^3(K) = \pi \int f(z)^2 \mathrm{d}z.$$

Aufgabe (Soll nicht abgegeben werden und wird nicht bewertet.). Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte die zufällig auf $B_1(0)$ platziert sind. Berechne den mittleren quadratischen Abstand der Punkte, das heißt das Integral

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{B_1(0)} \int_{B_1(0)} \|x-y\|^2 \,\mathrm{d}\lambda^2(x)\mathrm{d}\lambda^2(y).$$

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind in der Vorlesung am Donnerstag, dem 24.10.2019 abzugeben.