Wintersemester 2019/20
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

Dr. André Uschmajew
Dr. Max Pfeffer

7. Übungsblatt
Optimierung I

Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt in der Übung am 12.12.2019.

Übungsaufgaben

1. **Lagrange-Funktion für Gleichungsnebenbedingungen.**

   Wir betrachten das gleichungsrestringierte Problem
   $$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad h(x) = 0$$
   für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Lagrange-Funktion ist dann gegeben als
   $$L(x, \mu) = f(x) + \mu h(x).$$

   (a) Unter welchen Bedinungen erfüllt ein Paar $(x^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, für welches
   $$\nabla L(x^*, \mu^*) = \begin{pmatrix} \nabla_x L(x^*, \mu^*) \\ \nabla_\mu L(x^*, \mu^*) \end{pmatrix} = 0$$
   gilt, die KKT-Bedingungen? Wann kann man $\nabla f(x^*) = 0$ erwarten?

   (b) Welches Problem tritt bei der Suche eines stationären Punktes von L auf?

   (c) Sei $h(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Können wir $\mu \geq 0$ fordern? Hilft das bei der Suche eines stationären Punktes?

2. **Penalisierung und Projektion.**

   Gegeben sei eine quadratische Funktion f mit positiv definiter Hesse-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, welche unter der Nebenbedingung $\|x\| = 1$ minimiert werden soll.

   (a) Stellen Sie das Penalty-Verfahren auf. Für welches $\alpha_k > 0$ gilt $x^k \in X$?

   (b) Betrachten Sie die Iterationsvorschrift
   $$x^{k+1} = \frac{x^k - \sigma_k \nabla f(x^k)}{\|x^k - \sigma_k \nabla f(x^k)\|}$$
   mit exakter Schrittweite σ_k. Was ist anders als beim Penalty-Verfahren? Gibt es immer ein globales Minimum auf $\mathbb{S}^{n-1}$?

3. **Dualität bei restringierter Längenminimierung.**

   Für eine symmetrische und positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einem $b \in \mathbb{R}^n$ sei das Optimierungsproblem
   $$\min \|x\|_1 \quad \text{u.d.N.} \quad Ax = b$$
   zu lösen.

   Stellen Sie das duale Problem auf.

Hausaufgaben

1. **Lagrange-Dualität bei quadratischen Programmen.** (4 Punkte)

   Seien $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^p$. Stellen Sie das duale Problem zu folgendem (primalen) Problem auf:

   $$\min \frac{1}{2}x^\mathsf{T} Qx + c^\mathsf{T} x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax \geq a,\ Bx = b$$

   Ersetzen Sie hierbei das innere Infimum (des dualen Problems) durch geeignete Nebenbedingungen.

2. **Trajektorie des Penalty-Verfahrens.** (8 Punkte)

   Gegeben sei das Optimierungsproblem

   $$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) \leq 0$$

   mit $f(x) = x_1^2 + 4x_2 + x_2^2,\ g(x) = -x_2$.

   (a) Bestimmen Sie die Lösung x^* des Optimierungsproblems und den dazugehörigen Lagrange-Multiplikator λ^*.

   (b) Berechnen Sie für $\alpha > 0$ das globale Minimum $x(\alpha)$ von P_α. Begründen Sie hierfür zunächst, dass $x(\alpha)$ nicht in X liegt und diskutieren Sie dann P_α auf $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

   (c) Zeigen Sie $x^* = \lim_{\alpha\to\infty} x(\alpha)$ und $\lambda^* = \lim_{\alpha\to\infty} a \max\Big(0, g\big(x(\alpha)\big)\Big)$.

   (d) Wie verhält sich die Konditionszahl der Hesse-Matrix $\nabla^2 P_\alpha\big(x(\alpha)\big)$ für $\alpha \to \infty$?

3. **Projeziertes Gradientenverfahren.** (8 Punkte)

   Betrachten Sie das projezierte Gradientenverfahren aus Übungsaufgabe 2(b) für die Minimierung einer quadratischen Funktion f mit positiv definiter Hesse-Matrix und Gleichungsnebenbedingung $\|x\| = 1$. Sei x^* das globale Minimum von f mit $\|x^*\| > 1$. Zeigen Sie:

   (a) Es gibt nur eine globale Lösung $\tilde{x}$ des restringierten Problems.[1]

   (b) $\tilde{x}$ ist ein Fixpunkt der Iteration.

   (c) Alle Fixpunkte der Iteration erfüllen die KKT-Bedingung.

[1] Ersetzen Sie hierfür die Nebenbedingung $\|x\| = 1$ durch die Ungleichung $\|x\| \leq 1$ und folgern Sie, dass beide Probleme das gleiche Minimum besitzen.