

## Partielle Differentialgleichungen I

### Blatt 8

#### Aufgabe 1 (Bemerkungen zum Wärmeleitungskern)

Seien  $g, \tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und beschränkt und setze  $u(x, t) = (\Phi(\cdot, t) * g)(x)$ ,  $\tilde{u}(x, t) = (\Phi(\cdot, t) * \tilde{g})(x)$ . Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Wärmeleitungskerns.

1. Falls  $a \leq g(y) \leq b$  für alle  $y \in \mathbb{R}^n$ , so folgt  $a \leq u(x, t) \leq b$  für alle  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ .
2. Falls  $g \leq \tilde{g}$ , so folgt  $u \leq \tilde{u}$ .
3. Falls  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy.$$

4. Die Wärmeleitungsgleichung hat 'unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit', d.h. falls  $0 \leq g$  und  $\text{spt}(g) \subset B_1$ , dann folgt

$$0 < (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{(|x|+1)^2}{4t}} \int_{B_1} g dy \leq u(x, t) \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{(|x|-1)^2}{4t}} \int_{B_1} g dy.$$

5. Es gilt  $\Phi_t - \Delta \Phi = \delta_{(0,0)}$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ .

#### Aufgabe 2

Finden Sie eine explizite Darstellungsformel für eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}; \end{cases}$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$  und  $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  beide beschränkt sind. Ist diese Lösung eindeutig?

#### Aufgabe 3\*

<sup>a</sup> Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und  $C^1$ -regulär,  $M > 0$ . Wir definieren die Funktionenräume

$$\text{Lip}(U) := \{u : U \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ ist Lipschitz stetig auf } U \text{ mit Lipschitzkonstante } \text{Lip}(u) < \infty\}$$

$$\text{Lip}^M(U) := \{u \in \text{Lip}(U) : \text{Lip}(u) < M\}.$$

Für ein  $g \in \text{Lip}(U)$  und  $M > \text{Lip}(g)$  definieren wir zudem

$$\text{Lip}_g(U) := \{u \in \text{Lip}(U) : u = g \text{ auf } \partial U\}$$

$$\text{Lip}_g^M(U) := \{u \in \text{Lip}(U) : \text{Lip}(u) < M \text{ und } u = g \text{ auf } \partial U\}.$$

Wir verwenden in dieser Aufgabe ohne Beweis das Theorem von Rademacher: Sei  $u \in \text{Lip}^M(U)$ . Dann ist  $u$  fast überall differenzierbar und  $Du(x) \in L^\infty(U)$  mit  $|Du|(x) \leq \text{Lip}(u) \leq M$  für fast alle  $x$ . Sie dürfen also in dieser Aufgabe mit Lipschitzfunktionen rechnen als wären sie  $C^1$ .

Für  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und konvex definieren wir das Funktional

$$I[u] := \int_U F(Du(x)) dx.$$

---

<sup>a</sup>Diese Aufgabe ist nicht direkt relevant für die Vorlesung und ist tendenziell eher schwerer. Sie ist auf Basis der Fragen in der Vorlesung konzipiert und gibt einen Einblick in das Themengebiet der Variationsrechnung. Versuchen Sie sich vielleicht zuerst an Punkt (4).

1. Zeigen Sie, dass für jedes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt<sup>b</sup>

$$\int_U F(A) dx \leq \int_U F(A + D\varphi) dx \quad \forall \varphi \in \text{Lip}_0(U); \quad (1)$$

d.h. die Funktion  $u_A(x) = A \cdot x$  ist ein Minimierer des Funktionals  $I(u)$  mit Randdaten  $u_A(x)$  bzw.

$$I[u_A] = \min_{v \in \text{Lip}_{u_A}(U)} I[v].$$

*Hinweis:* Benutzen Sie die Konvexität von  $F$ , d.h.  $F(B) - F(A) \geq DF(A) \cdot (B - A)$ .

2. Sei  $g \in \text{Lip}(U)$  und  $M > \text{Lip}(g)$ . Zeigen Sie, dass ein  $u \in \text{Lip}_g^M(U)$  existiert, mit

$$I[u] = \min_{v \in \text{Lip}_g^M(U)} I[v]. \quad (2)$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) Benutzen Sie das Theorem von Arzelà-Ascoli, um einen Grenzwert  $u \in \text{Lip}_g^M(U)$  einer Teilfolge einer Minimierungsfolge  $\{u_n\}_n$  zu finden.  
 (b) Benutzen Sie die Konvexität von  $F$ , um zu zeigen, dass  $I[u] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I[u_n]$ . *Sie können zur Vereinfachung annehmen, dass  $DF(Du) \in C^1$ .*
3. Sei  $u$  ein Minimierer wie in (2), der außerdem  $\text{Lip}(u) < M$  erfüllt. Zeigen Sie, dass  $u$  ein globaler Minimierer ist, d.h.

$$I[u] \leq \inf_{v \in \text{Lip}_g(U)} I[v].$$

4. Berechnen Sie die Euler-Lagrange Gleichung für einen Minimierer  $u$  wie in Punkt (2) unter der zusätzlichen Annahme, dass  $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \in C^2(U)$  und  $\|Du\|_\infty < M$ .

---

<sup>b</sup>Ein Funktional, welches für alle  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (1) erfüllt, wird als quasikonvex bezeichnet. Die Eigenschaft (1) ist notwendig für die Unterhalbstetigkeit des Funktionals.