4.Übung zur Vorlesung Analysis
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Dienstag, 5.11.2019
Abgabe: Dienstag, 12.11.2019 in der Vorlesung oder bis spätestens 13:00 Uhr im Postfach Hardtke (die Postfächer befinden sich im Raum A 514).

Wichtig: Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (2+1+1 Punkte)**.**
1) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $c_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = 0.$$

2) Zeigen $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.
3) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte)**.** Wir definieren rekursiv eine Folge nichtnegativer Zahlen durch

$$a_0 := 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Es ist also $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, usw.
Zeigen Sie:
1) $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (vollständige Induktion).
2) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend.
3) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (mit Begründung):

(a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2+3}{n^3}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

Hinweis zu (a): Verwenden Sie die Summenformel aus Aufgabe 1, Teil 1) des zweiten Übungszettels.
Hinweis zu (b): Bernoulli-Ungleichung.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in \mathbb{R} \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \, |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.