Übungsblatt 3

1) a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: wenn $n \in \mathbb{N}$ dann gilt

$$2\sqrt{n} - 1 \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2.$$

Hinweis: Die 2.(bisher 3.) Binomische Formel könnte im Induktionsschritt hilfreich sein. 4 Punkte

b) Beweisen Sie: für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Schlussfolgern Sie daraus, dass die Menge der in der Vorlesung diskutierten Zahlen $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, beschränkt ist. 3 Punkte

2) Für $x \in \mathbb{R}$ sind die Potenzen x^n, $n \in \mathbb{N}_0$, definiert durch $x^0 = 1$ und $x^{n+1} = x \cdot x^n$. Ausserdem setzten wir, falls $x \neq 0$, $x^{-n} = (x^n)^{-1}$ – warum ist dies wohldefiniert? Beweisen Sie (unter Benutzung der Induktion), dass

a) $x^n x^m = x^{n+m}$ und $(x^n)^m = x^{nm}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

b) $(xy)^n = x^n y^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Betrachten Sie in a) zunächst nur $m \in \mathbb{N}_0$. 5+1 Punkte

Abgabe: am 7.11.2019, 17.10 Uhr Hörsaal 1