

## 8. Übungsblatt zu "Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 5.12.2019

Beachten Sie auch den separaten Hinweis auf die Weihnachtsvorlesung am 16.12.2019.

- 29.) Ermitteln Sie zu den folgenden Polynomen  $p_i, q_i$  – für  $i \in \{1, 2\}$  – Polynome  $s_i, r_i$ , so dass gilt:

$$p_i(x) = q_i(x) \cdot s_i(x) + r_i(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}; \text{ grad}(r_i) < \text{grad}(q_i).$$

i)  $p_1(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1, q_1(x) = 2x - 4;$

ii)  $p_2(x) = x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 3, q_2(x) = x^2 - 3x + 1.$

- 30i) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Ist  $p$  ein – vom Null-Polynom verschiedenes – Polynom vom Grad  $n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , so besitzt  $p$  höchstens  $n$  paarweise verschiedene Nullstellen.

ii) Es seien  $n + 1$  Punkte  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  gegeben mit  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$ . Ferner seien die zugehörigen *Lagrangeschen Interpolationspolynome*  $L_0, L_1, \dots, L_n$  vom Grad  $n$  definiert durch:

$$L_i(x) := \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Beweisen Sie, dass  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$p(x) := \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x) = y_0 \cdot L_0(x) + \dots + y_n \cdot L_n(x)$$

das *einzig*e Polynom mit folgenden Eigenschaften ist:

(I) Für alle  $i$  mit  $0 \leq i \leq n$  ist  $p(x_i) = y_i$ .

(II)  $p$  hat höchstens den Grad  $n$ .

*Hinweise:* In i) können Sie annehmen, dass  $p$  überhaupt eine Nullstelle  $x_0$  hat. Dividieren Sie das Polynom  $p$  durch das Polynom  $x - x_0$ .

In ii) verifiziert man direkt durch Einsetzen, dass das angegebene Polynom  $p$  die gewünschten Eigenschaften hat. Gäbe es zwei Polynome  $p_1, p_2$  mit diesen Eigenschaften, so wende man i) an auf die Differenz  $p_1 - p_2$ .

- 31.) Von dem Polynom  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $p(x) := x^3 - 5x^2 - x + 21$  ist bekannt, dass es eine ganzzahlige Nullstelle im Intervall  $[-3, 3]$  hat. Ermitteln Sie *alle* Nullstellen von  $p$ .

*Hinweis:* Hat man eine Nullstelle  $x_1$  ermittelt, so sind noch die Nullstellen des quadratischen Polynoms  $p(x) : (x - x_1)$  zu berechnen.

- 32.) Beweisen Sie den Satz von Pythagoras:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse.

*Hinweis:* Es seien  $a, b$  die Längen der Katheten, und  $c$  sei die Länge der Hypotenuse. Zerlegen Sie ein Quadrat der Seitenlänge  $a + b$  in ein Quadrat der Seitenlänge  $c$  und vier rechtwinklige Dreiecke, die alle kongruent zu dem gegebenen sind.