

Übungsblatt 12

- 1) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strikt monoton wachsend **und stetig**. Zeigen Sie, dass $f(I)$ ebenfalls ein Intervall ist, und beweisen Sie, ohne Verwendung von Satz 3.22 und ohne Benutzung des Satzes von Bolzano-Weierstrass, dass f^{-1} stetig ist. *Eine kleine Fallunterscheidung könnte notwendig werden.* 1+3 Punkte
- 2) “Alles von dem Rolle”
- a) Sei $f \in C^3(\mathbb{R})$ und $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in (0, 1)$ gibt mit $f'''(x) = 0$.
- b) Sei $g(x) = (x^2 - 1)^n$. Zeigen Sie mit Induktion, dass für $k = 0, 1, 2, \dots, n$ die Funktion $g^{(k)}$ ein Polynom ist, dass mindestens k verschiedene Nullstellen in $(-1, 1)$ hat. Beweisen Sie damit, dass $g^{(n)}$ ein Polynom vom Grad n ist, dass alle Nullstellen in $(-1, 1)$ hat. 3+3 Punkte
- 3) i) Bestimmen und klassifizieren Sie die lokalen Maximal- und Minimalstellen der Funktion
- $$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 2020.$$
- ii) Zeigen Sie, dass es eine differenzierbare Funktion $g : (-\infty, 0) \rightarrow (0, \infty)$ gibt, so dass
- $$2g(x) - \log(1 + 2g(x)) + x = 0 \text{ für alle } x \in (-\infty, 0). \quad 2+5 \text{ Punkte}$$
- 4) a) Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit $f(x) + f''(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ (harmonischer Oszillator). Zeigen Sie, wenn $f(0) = f'(0) = 0$ dann $f(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. (*Betrachten Sie die Funktion $g(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$.*) Schlussfolgern Sie: Im Allgemeinen ist $f(x) - f(0) \cos(x) - f'(0) \sin(x)$ identisch gleich Null auf \mathbb{R} .
- b) Sei $f \in C^2((a, b))$ streng wachsend mit $f'(c) \neq 0$ für ein $c \in (a, b)$. Finden Sie eine Formel für die zweite Ableitung von f^{-1} an der Stelle $f(c)$. 3 + 3* Punkte
- 5) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ im offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbar, $a, b \in I$ und $a < b$.
- i) Zeigen Sie: falls $f'(a) < 0 < f'(b)$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.
- ii) Beweisen Sie: wenn $(f'(a) - y)(y - f'(b)) > 0$, dann gibt es ein $x \in (a, b)$, so dass $f'(x) = y$.
- iii) Muss f' auf $[a, b]$ beschränkt sein? 2* + 3* + 2* Punkte

Abgabe: am 23.1.2020, 17.10 Uhr Hörsaal 9

Die (Übungsschein-)Klausur findet am 6.2.2020 von 17-19 Uhr statt.