Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Dr. Jonas Hirsch
Dr. Dominik Inauen

WS2019/20

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 11

Aufgabe 1

(i) Definiere das Bessel-Potential durch

$$B(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\, dt \tag{1}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $B \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\widehat{B}(\xi) = \frac{1}{1 + 4\pi^2|\xi|^2}\,. \tag{2}$$

(ii) Finden Sie eine formale Lösung für

$$-\Delta u + u = f \text{ in } \mathbb{R}^n\,. \tag{3}$$

Hinweis: Fouriertransformieren Sie die PDE und nutzen Sie Teil (i).

(iii)* Zeigen Sie, dass die formale Lösung aus (ii) für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine klassische Lösung ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass keine nicht-triviale integrierbare Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ existiert, so dass f und $\hat{f}$ kompakten Träger haben.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zuerst für $n = 1$, indem Sie zeigen, dass die Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\cdot z}\, dx$ holomorph ist, falls f kompakten Träger hat. Folgern Sie nun die Aussage.

Aufgabe 3* (Temperierte Distributionen)

Wir definieren eine *temperierte Distribution* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch die folgenden Eigenschaften:

(a) $f \mapsto T(f)$ ist eine lineare Abbildung auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, also $T(af + bg) = a\,T(f) + b\,T(g)$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;

(b) $T(f_k) \to T(f)$ wenn $f_k \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Hierbei gilt $f_k \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $\lim_{k\to\infty} \left\| x^\beta D^\alpha (f_k - f)\right\|_\infty = 0$ für alle Multiindizes α, β.

(i) Zeigen Sie die folgenden Inklusionen:
   (a) $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.
   (b) $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ für alle $1 \le p \le \infty$.
   (c) Sei μ ein signiertes Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit endlicher Masse, so ist $\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Definiere nun die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'$ durch

$$\hat{T}(f) := T(\hat{f})\,, \tag{4}$$

und analog die inverse Fouriertransformation. Zeigen Sie:
   (a) $\widehat{\cdot}, \check{\cdot}$ sind lineare Operatoren von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
   (b) $\check{\hat{T}} = T$ für alle $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
   (c) $\widehat{1} = \delta_0$ und $\widehat{\delta_0} = 1$.