

10. Übungsblatt zu “Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler”

Leipzig, den 19.12.2019

37.) Die Funktion  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  sei definiert durch  $f(x) := \frac{1}{x}$ . Beweisen Sie, dass  $f$  *nicht* gleichmäßig stetig ist.

38.) Für einen fixierten Parameter  $a \in \mathbb{R}$  sei die Funktion  $f_a : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f_a(x) := \frac{x^2 + 5x + a}{x-1}.$$

Untersuchen Sie – mit Begründung, für welche Parameter  $a$  die Funktion  $f_a$  zu einer stetigen Funktion  $\tilde{f}_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fortgesetzt werden kann. Bestimmen Sie gegebenenfalls auch  $\tilde{f}_a(1)$ .

39.) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

i)  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $f_1(x) := \exp(-x^2 + 6x + 10)$ .

ii)  $f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , gegeben durch  $f_2(x) := x^x$ .

iii)  $f_3 : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $f_3(x) := \arcsin(x)$ .

iv)  $g_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$g_\alpha(x) := \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \alpha\right),$$

wobei  $\alpha$  ein beliebiger reeller Parameter ist. Zeigen Sie genauer:  $g'_\alpha = g_\beta$  für  $\beta := \alpha + \frac{2\pi}{3}$ . Was ist also  $g''_\alpha$  ?

Berechnen Sie auch die globale Maximalstelle von  $f_1$  und die globale Minimalstelle von  $f_2$ .

*Hinweise:* Wenden Sie in den Teilen i) und ii) die Kettenregel an und in iii) die Formel für die Umkehrfunktion.

Stellen Sie die Funktion  $f_2$  zunächst dar in der Gestalt  $f_2(x) = \exp(g_2(x))$  für eine geeignete Funktion  $g_2$ .

In iv) können Sie das Additionstheorem für die Cosinus-Funktion sowie – neben den bekannten Symmetrie-Eigenschaften – Aufgabe 33 benutzen.

40.) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $]a, b[$ . Beweisen Sie – siehe auch Satz 4.11:

i)  $f$  ist genau dann auf dem gesamten Definitionsbereich  $[a, b]$  monoton wachsend, wenn für alle  $x \in ]a, b[$  gilt:  $f'(x) \geq 0$ .

ii) Gilt  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ , so ist  $f$  auf  $[a, b]$  streng monoton wachsend.

*Hinweis:* Benutzen Sie in beiden Teilen den Mittelwertsatz.