Seminare für Grundschullehramt

Wie angekündigt, ist die Vorlesung für die Studenten des Grundschullehramts Ende Dezember beendet. Im Januar finden stattdessen entsprechende Seminare statt. Die Termine sind:

Seminar A:
Montags 17:15–18:45 Uhr, Raum SG 3-11
Dienstags 11:15–12:45 Uhr, Raum SG 3-14

Seminar B:
Dienstags 17:15–18:45 Uhr, Raum SG 3-11
Donnerstags 17:15–18:45 Uhr, Raum SG 3-14

Seminarleiter ist Herr Käßemodel. Email: bernd.kaesemodel@uni-leipzig.de

Es handelt sich um **zwei identische Seminare**, d. h. jeder von Ihnen sollte zu **einem** dieser Termine angemeldet sein.

Jeder von Ihnen sollte im Seminar einen kurzen Vortrag von etwa 20 Minuten halten. Nachfolgend finden Sie eine Liste der Seminarthemen. Die Themen sind bereits vollständig ausgearbeitet. Ihre Aufgabe besteht darin, Ihr eigenes Thema zu verstehen und den anderen Seminarteilnehmern an der Tafel zu präsentieren.

Sie können bis **spätestens Donnerstag den 12.12.** eine Email an Herrn Käßemodel schicken, um ihm Ihre Themenwünsche mitzuteilen (schreiben Sie dazu auch, ob Sie in Seminar A oder B sind). Allerdings können mit Sicherheit nicht alle Wünsche berücksichtigt werden. Ggf. bekommen Sie einfach ein Thema zugeteilt.

Die Vorträge werden nicht benotet, die Teilnahme am Seminar ist aber Voraussetzung, um zur Klausur zugelassen zu werden.

Die Übungsgruppen für Grundschullehramt finden im Januar nach wie vor statt (zu den bisherigen Terminen). Allerdings gibt es für Sie dann keine Übungszettel mehr, sondern es wird der Stoff der Vorlesung nochmals wiederholt.

Seminarthemen

1) Potenzmenge:
Sei M eine beliebige Menge. Dann heißt

$$\mathcal{P}(M) := \{A : A \subseteq M\}$$

die *Potenzmenge* von M.
$\mathcal{P}(M)$ ist also die Menge aller Teilmengen von M. Insbesondere gilt stets $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$.

Beispiele:
(i) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
(ii) $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$
(iii) $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
(iv) $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Satz: Ist M eine endliche Menge mit n Elementen, so ist auch $\mathcal{P}(M)$ endlich und hat genau 2^n Elemente.

Beweis. Es sei

$$A := \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^n.$$

Dann hat A genau 2^n Elemente (für jedes a_i hat man die beiden Möglichkeiten 0 und 1, für $(a_1, \dots, a_n)$ also insgesamt 2^n Möglichkeiten). Zum Beweis reicht es also aus, eine bijektive Abbildung $F : A \to \mathcal{P}(M)$ zu konstruieren.
Dazu schreiben wir die n-elementige Menge M in der Form $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ und definieren F wie folgt: Für $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ sei

$$F(a) := \{x_i : i \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } a_i = 1\}.$$

Offensichtlich bildet F die Menge A nach $\mathcal{P}(M)$ ab. Wir müssen noch die Bijektivität zeigen.
(a) Ist $B \in \mathcal{P}(M)$, so setzen wir einfach

$$a_i := \begin{cases} 1, & \text{falls } x_i \in B, \\ 0, & \text{falls } x_i \notin B. \end{cases}$$

Dann ist $a := (a_1, \dots, a_n) \in A$ und $F(a) = B$. Also ist F surjektiv.
(b) Sind $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in A$ mit $F(a) = F(b)$, so folgt

$$a_i = 1 \;\Leftrightarrow\; x_i \in F(a) \;\Leftrightarrow\; x_i \in F(b) \;\Leftrightarrow\; b_i = 1.$$

Also stimmen die Einseinträge von a und b überein und alle anderen Einträge sind jeweils 0, d. h. es gilt $a = b$. Somit ist F auch injektiv und wir sind fertig. $\square$

2) Kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten:
Ist M eine endliche Menge mit n Elementen, so besitzt M genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen (wobei $k \in \{0, \dots, n\}$).

Beweis. Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$:
Induktionsanfang $n = 0$: Dann ist $M = \emptyset$ und besitzt genau eine Teilmenge mit 0 Elementen, nämlich $\emptyset$.
Induktionsschritt: Angenommen die Behauptung stimmt für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und es ist M eine Menge mit $n+1$ Elementen. Sei $k \in \{0, \dots, n+1\}$ und sei

$$\mathcal{M}_k := \{A \subseteq M : |A| = k\},$$

wobei $|A|$ für die Anzahl der Elemente von A steht. Wir wollen $|\mathcal{M}_k| = \binom{n+1}{k}$ zeigen.
Das ist klar für $k = 0$ oder $k = n+1$ (denn dann gibt es nur $\emptyset$ bzw. nur M als einziges Element von $\mathcal{M}_k$).
Sei nun $k \in \{1, \dots, n\}$. Wir fixieren ein $a \in M$. Dann ist $|M \setminus \{a\}| = n$.
Wir teilen nun $\mathcal{M}_k$ folgendermaßen auf:

$$\mathcal{M}_k = \{A \subseteq M : a \in A,\ |A| = k\} \cup \{A \subseteq M : a \notin A,\ |A| = k\}.$$

Die rechts stehenden Mengen nennen wir kurz $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Wegen $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ gilt $|\mathcal{M}_k| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$.
Offenbar ist

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq M \setminus \{a\} : |A| = k\}$$

und daher gilt nach Induktionsvoraussetzung $|\mathcal{B}| = \binom{n}{k}$.
Ferner ist $|\mathcal{A}|$ gleich der Anzahl der $(k-1)$-elementigen Teilmengen von $M \setminus \{a\}$ (denn das eine Element a ist vorgegeben). Aus der Induktionsvoraussetzung folgt also $|\mathcal{A}| = \binom{n}{k-1}$.
Insgesamt folgt

$$|\mathcal{M}_k| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

$\square$

Beispiel: Beim üblichen Lottospiel (6 aus 49 ohne Zusatzzahl oder Superzahl) werden 6 verschiedene Zahlen aus den Zahlen von 1 bis 49 gezogen, wobei die Reihenfolge ihrer Ziehung unerheblich ist. Es wird also eine 6-elementige Teilmenge von $\{1, \dots, 49\}$ ausgewählt. Nach unserer obigen Überlegung gibt es dafür

$$\binom{49}{6} = 13.983.816$$

verschiedene Möglichkeiten.
Bei Abgabe eines einzigen Tipps beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit daher

$$\frac{1}{13.983.816} \approx 0,00000007 = 0,000007\,\%.$$

3) Irrationalität von e:
Die Eulersche Zahl e ist irrational.

Beweis. Angenommen e wäre rational. Dann wäre auch $1/e$ rational, also

$$\frac{1}{e} = \exp(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{p}{q}$$

für gewisse $p, q \in \mathbb{N}$.
Die Folge $(1/k!)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, daher gilt nach der Fehlerabschätzung im Leibniz-Kriterium (Satz IV.2.14. im Skript)

$$\left| \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(q+1)!}.$$

Multiplikation mit $q!$ liefert

$$\left| p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \frac{q!}{k!} \right| \leq \frac{1}{q+1}.$$

Nun ist aber $q!/k! = (k+1)(k+2) \cdot \dots \cdot q \in \mathbb{N}$ für $k = 0, \dots, q$. Daher ist $z := p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \frac{q!}{k!}$ eine ganze Zahl und andererseits ist $|z| \leq 1/(q+1) < 1$. Deshalb muss $z = 0$ gelten.
Daraus folgt wiederum $\sum_{k=0}^{q} (-1)^k/k! = p/q = 1/e$.
Bezeichnet man mit s_n die n-te Partialsumme von $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/k!$, so ist $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend und $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend (das zeigt man genauso wie beim Beweis des Leibniz-Kriteriums, nur das man in diesem Fall sogar strenge Monotonie erhält, da $(1/k!)_{k\in\mathbb{N}}$ sogar streng monoton fällt). Dann folgt aber $s_{2n} > 1/e$ und $s_{2n-1} < 1/e$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $1/e = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k/k! = s_q \neq 1/e$. Mit diesem Widerspruch ist der Beweis beendet. $\square$

4) Eine Summenformel:
Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2}.$$

Beweis. Variante 1: Vollständige Induktion.
Induktionsanfang ($n = 1$): Es ist

$$\frac{q - 2q^2 + q^3}{(1-q)^2} = q\frac{1 - 2q + q^2}{(1-q)^2} = q\frac{(1-q)^2}{(1-q)^2} = q.$$

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} kq^k = \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2} + (n+1)q^{n+1} \\
&= \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2} + (n+1)q^{n+1}(1-q)^2}{(1-q)^2} \\
&= \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2} + (n+1)q^{n+1}(1 - 2q + q^2)}{(1-q)^2} \\
&= \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2} + (n+1)q^{n+1} - 2(n+1)q^{n+2} + (n+1)q^{n+3}}{(1-q)^2} \\
&= \frac{q - (n+2)q^{n+2} + (n+1)q^{n+3}}{(1-q)^2}.
\end{aligned}$$

Variante 2: Nach der geometrischen Summenformel gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(q) := \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \qquad \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Durch Ableiten folgt

$$\begin{aligned}
&f_n'(q) = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{-(n+1)q^n(1-q) - (1-q^{n+1})(-1)}{(1-q)^2} \\
&= \frac{-(n+1)q^n + (n+1)q^{n+1} + 1 - q^{n+1}}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)^2}.
\end{aligned}$$

Multiplikation mit q liefert

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2}.$$

$\square$

5) Fibonacci-Folge:
Die *Fibonacci-Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird rekursiv definiert durch $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 2$.
Behauptung: Es gilt die explizite Bildungsvorschrift

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir nennen die durch die obige Formel definierte Folge provisorisch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Induktionsanfang: Es ist

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5} = 1 = a_1$$

und

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{4\sqrt{5}}{4} = 1 = a_2. \end{aligned}$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $a_k = b_k$ für $k = 1, \dots, n$. Dann folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = b_n + b_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\frac{3-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Allerdings gilt

$$\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Daher folgt

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) = b_{n+1}.$$

$\square$

Zusammenhang zum goldenen Schnitt: Beim *goldenen Schnitt* geht es darum, eine Strecke der Länge L so zu teilen, dass sich der längere Teil a zum kürzeren Teil b genauso verhält wie die Gesamtlänge L zum Teil a, also $a/b = L/a$, wobei $L = a + b$. Das Verhältnis $\Phi := a/b$ wird goldener Schnitt genannt. Es folgt $\Phi = 1 + 1/\Phi$, also $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.
Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

also gerade die beiden in der expliziten Bildungsvorschrift der Fibonacci-Folge als Basen auftretenden Zahlen. Da Φ natürlich positiv sein muss, folgt $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$.
Der goldene Schnitt ist in der Architektur und der bildenden Kunst von Bedeutung, findet sich aber auch in der Natur, z. B. bei der Anordnung der Blätter gewisser Pflanzen.

6) Cesàro-Konvergenz:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge ihrer *Cesàro-Mittel*, d. h.

$$c_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es gelte $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Dann gilt auch $c_n \to a$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, existiert ein $K > 0$ mit $|a_n| \le K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $a_n \to a$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \le \varepsilon/2$ für $n \ge N$.
Es gilt $N(K + |a|)/n \to 0$ für $n \to \infty$. Also existiert ein $n_0 > N$ mit $N(K + |a|)/n \le \varepsilon/2$ für $n \ge n_0$.
Dann gilt für alle $n \ge n_0$:

$$\begin{aligned}
|c_n - a| &= \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a \right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k - a| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} |a_k - a| \le \frac{1}{n}N(K + |a|) + \frac{1}{n}(n - N)\frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + (1 - N/n)\frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, so kann die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Cesàro-Mittel trotzdem konvergieren. Ist z. B. $a_n = (-1)^n$, so folgt

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Insbesondere ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und folglich gilt $c_n = s_n/n \to 0$ für $n \to \infty$.

7) Allgemeine Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:
Für alle $x_1, \ldots, x_n > 0$ gilt

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(den Ausdruck links nennt man das *geometrische Mittel*, den rechts das *arithmetische Mittel* von $x_1, \ldots, x_n$).

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Schritten:
(a) Für alle $x_1, \ldots, x_n > 0$ gilt

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n.$$

Beweis durch Induktion nach n. Der Fall $n = 1$ ist klar.
Angenommen nun die Behauptung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ und es seien $x_1 \ldots, x_{n+1} > 0$ mit $\prod_{i=1}^{n+1} x_i = 1$.
Indem man ggf. umordnet, kann man $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n+1}$ annehmen. Dann folgt aber $x_{n+1} \geq 1$, denn wäre $x_{n+1} < 1$, so wäre $x_i < 1$ für alle $i = 1, \ldots, n+1$ und somit auch $\prod_{i=1}^{n+1} x_i < 1$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Analog folgt $x_1 \leq 1$.
Da nach Voraussetzung die Behauptung für n stimmt, folgt aus $\prod_{i=1}^{n+1} x_i = 1$ zunächst $x_1 x_{n+1} + x_2 + \ldots x_n \geq n$. Das liefert

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq n - x_1 x_{n+1} + x_1 + x_{n+1} = n + 1 + (1 - x_{n+1})(x_1 - 1).$$

Wegen $x_{n+1} \geq 1$ und $x_1 \leq 1$ ist $(1 - x_{n+1})(x_1 - 1) \geq 0$ und es folgt

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq n + 1.$$

(b) Nun seien $x_1, \ldots, x_n > 0$ beliebig. Wir setzen $a := (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1/n}$. Dann ist $\prod_{i=1}^{n}(x_i/a) = 1$ und somit folgt aus (a) $\sum_{i=1}^{n} x_i/a \geq n$, also

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}.$$

□

8) Mahler-Ungleichung:
Für $x_1, \ldots, x_n > 0$ und $y_1, \ldots, y_n > 0$ gilt

$$\prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{x_i + y_i} \geq \prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{x_i} + \prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{y_i}.$$

Beweis. Nach der allgemeinen Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (siehe 7)) gilt

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i + y_i} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i + y_i}$$

und

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i + y_i} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i + y_i}.$$

Es folgt

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i + y_i} \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i + y_i} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_i + y_i} + \frac{y_i}{x_i + y_i} \right) = \frac{1}{n} n = 1,$$

also

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{x_i}}{\prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{x_i + y_i}} + \frac{\prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{y_i}}{\prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{x_i + y_i}} \leq 1.$$

Das ist äquivalent zur Behauptung. □

9) Ein Grenzwertsatz:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_0^+$ mit $a_{n+m} \leq a_n a_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf\{ \sqrt[n]{a_n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis. Aus der Bedingung $a_{n+m} \leq a_n a_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ folgt induktiv leicht $a_{kn} \leq a_n^k$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$.
Wir bezeichnen das obige Infimum kurz mit s. Ist dann ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert (nach Definition des Infimums) ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[N]{a_N} < s + \varepsilon/2$.
Wir setzen noch $a_0 := 1$ und $M := \max\{a_0, \dots, a_{N-1}\}$.
Dann gilt für alle $r \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M}(s + \varepsilon/2)^{1-r/n} = s + \varepsilon/2,$$

also existiert ein $n_r \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{M}(s + \varepsilon/2)^{1-r/n} \leq s + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = s + \varepsilon \quad \forall n \geq n_r.$$

Sei nun $\nu := \max\{n_0, \dots, n_r, N\}$ und sei $n \geq \nu$ beliebig. Dann lässt sich n in der Form $n = kN + r$ für geeignetes $k \in \mathbb{N}$ und $r \in \{0. \dots, N-1\}$ schreiben (Division mit Rest). Es folgt

$$\begin{aligned} s &\leq \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_{kN+r}} \leq \sqrt[n]{a_r}\,\sqrt[n]{a_{kN}} \leq \sqrt[n]{a_r}\,\sqrt[n]{a_N^k} \\ &\leq \sqrt[n]{M}\,\sqrt[n]{(s+\varepsilon/2)^{kN}} = \sqrt[n]{M}(s+\varepsilon/2)^{1-r/n} \leq s + \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $|\sqrt[n]{a_n} - s| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq \nu$. $\square$

10) Vertauschung von Limes und Reihensumme:
Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit Grenzwert a_k. Es existiere eine Folge $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|a_{n,k}| \le M_k$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$, so dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergiert.
Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ absolut konvergent für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Wegen $|a_{n,k}| \le M_k$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ und der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ ist nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ absolut konvergent für alle $n \in \mathbb{N}$.
Ferner erhält man durch Grenzübergang $n \to \infty$ bei festem k auch $|a_k| \le M_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit folgt auch die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ aus dem Majorantenkriterium.
Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gilt $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} M_k = 0$, also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N+1}^{\infty} M_k \le \varepsilon/3$.
Wegen $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = a_k$ für $k = 1, \dots, N$ gilt auch $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |a_{n,k} - a_k| = 0$, also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=1}^{N} |a_{n,k} - a_k| \le \varepsilon/3$ für $n \ge n_0$.
Für alle $m > N$ und alle $n \ge n_0$ gilt daher

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=1}^{m} a_{n,k} - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| \le \sum_{k=1}^{N} |a_{n,k} - a_k| + \sum_{k=N+1}^{m} |a_{n,k} - a_k| \\
&\le \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=N+1}^{m} (|a_{n,k}| + |a_k|) \le \frac{\varepsilon}{3} + 2 \sum_{k=N+1}^{m} M_k \le \frac{\varepsilon}{3} + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} M_k \\
&\le \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Geht man hier bei festem $n \ge n_0$ mit m gegen ∞, so folgt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_0.$$

□

11) Intervallschachtelungsprinzip:
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} : x \in [a_n, b_n] \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ heißt der Durchschnitt der Intervalle $[a_n, b_n]$.
Wir machen nun folgende Zusatzannahmen:
1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
2) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.
Behauptung: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ enthält genau ein Element.

Beweis.
(a) Sind $x, y \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $|x - y| \leq b_n - a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen $b_n - a_n \to 0$ folgt $x = y$. Der Durchschnitt hat also höchstens ein Element.
(b) Wegen 1) gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ $a_n \in [a_m, b_m]$. Also ist $|a_n - a_m| \leq b_m - a_m$ für alle $n \geq m$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert wegen 2) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_m - a_m \leq \varepsilon$ für $m \geq n_0$. Es folgt $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ für $n \geq m \geq n_0$. Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit existiert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$.
Für alle $n \geq m$ ist $a_n \in [a_m, b_m]$, also $a_m \leq a_n \leq b_m$. Geht man hier bei festem $m \in \mathbb{N}$ mit n gegen ∞, so folgt $a_m \leq a \leq b_m$. Also ist $a \in [a_m, b_m]$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
Insgesamt folgt also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \{a\}$. $\square$

12) Lipschitz-Stetigkeit:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls es eine Zahl $L > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in D$$

gibt. In diesem Fall nennt man L eine *Lipschitz-Konstante* für f.

(i) Ist f Lipschitz-stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.
(ii) Die Umkehrung von 1) gilt i. A. nicht, z. B. ist die Wurzelfunktion auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.
(iii) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist f auch Lipschitz-stetig.

Beweis.
(i) Sei f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $\delta := \varepsilon/L$. Für alle $x, y \in D$ mit $|x-y| \leq \delta$ gilt dann $|f(x)-f(y)| \leq L|x - y| \leq L\delta = \varepsilon$. Das zeigt die gleichmäßige Stetigkeit von f.
(ii) Sei $f(x) := \sqrt{x}$ für $x \in [0, 1]$. Als stetige Funktion auf $[0, 1]$ ist f auch gleichmäßig stetig (siehe Satz VII.1.9. im Skript). Gäbe es ein $L > 0$ mit $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in [0, 1]$, so würde insbesondere (für $y = 0$) $\sqrt{x} \leq Lx$ für alle $x \in [0, 1]$ folgen. Daraus würde aber $1 \leq L\sqrt{x}$ für alle $x \in (0, 1]$ folgen, was wegen $\sqrt{x} \to 0$ für $x \to 0$ ein Widerspruch ist.
Also ist f nicht Lipschitz-stetig.
(iii) Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wegen der Stetigkeit von f' existiert $L := \max\{|f'(z)| : z \in [a, b]\}$.
Sind $x, y \in [a, b]$ mit $x \neq y$, so existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung eine Zahl ξ zwischen x und y mit

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi).$$

Es folgt $|f(x) - f(y)| = |x - y||f'(\xi)| \leq L|x - y|$. □

13) Fixpunkte monoton steigender Funktionen:
Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine monoton steigende Funktion. Dann hat f einen *Fixpunkt*, d. h. es existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = c$.

Beweis. Es sei $M := \{x \in [a, b] : x < f(x)\}$.
1. Fall: $a \geq f(a)$ Wegen $f(a) \in [a, b]$ folgt dann bereits $f(a) = a$ und wir sind fertig.
2. Fall: $a < f(a)$, also $a \in M$. Dann besitzt M als nichtleere, beschränkte Menge ein Supremum $c := \sup(M) \in [a, b]$.
Angenommen es wäre $f(c) < c$. Für alle $x \in [f(c), c] \subseteq [a, b]$ gilt dann (weil f monoton steigend ist) $f(x) \leq f(c) \leq x$, also $x \notin M$.
Nach Definition des Supremums gilt natürlich $x \leq c$ für alle $x \in M$. Wegen $[f(c), c] \cap M = \emptyset$ folgt also sogar $x < f(c)$ für alle $x \in M$. Das impliziert $c = \sup(M) \leq f(c) < c$, was ein Widerspruch ist.
Es muss also $f(c) \geq c$ gelten.
Wäre aber $f(c) > c$, so gäbe es ein $d \in (c, f(c))$ und da f monoton steigend ist, würde $f(d) \geq f(c) > d$ folgen. Also wäre $d \in M$ und gleichzeitig $d > c = \sup(M)$, was unmöglich ist. Es bleibt also nur $f(c) = c$. $\square$

14) Eine Charakterisierung stetiger Funktionen:
Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ heißt *abgeschlossen*, falls folgendes gilt: Für jede konvergente Folge, deren Glieder sämtlich in A liegen, liegt auch ihr Grenzwert in A.
Zum Beispiel ist $[a, b]$ in diesem Sinne abgeschlossen, (a, b) dagegen nicht (Beweis?).

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) f ist stetig.
(ii) Für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}$ ist auch das Urbild

$$f^{-1}[A] := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}$$

wieder abgeschlossen.

Beweis.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei f stetig und sei $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f^{-1}[A]$ mit $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}$. Es ist $x_0 \in f^{-1}[A]$ zu zeigen.
Nach Definition des Urbilds gilt $f(x_n) \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Stetigkeit von f impliziert $f(x_n) \to f(x_0)$. Da A abgeschlossen ist, folgt daraus auch $f(x_0) \in A$ und somit $x_0 \in f^{-1}[A]$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Es gelte (ii). Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert x_0. Wir müssen $f(x_n) \to f(x_0)$ zeigen.
Angenommen das wäre nicht so. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$ gilt. Das heißt man findet eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|f(x_{n_k}) - f(x_0)| > \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Wir setzen

$$A := \{y \in \mathbb{R} : |f(x_0) - y| \geq \varepsilon\}.$$

Das ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$.[1] Nach Voraussetzung (ii) ist also auch $f^{-1}[A]$ agbeschlossen. Nach Wahl der Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gilt $x_{n_k} \in f^{-1}[A]$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen $x_{n_k} \to x_0$ folgt also auch $x_0 \in f^{-1}[A]$, d. h. $f(x_0) \in A$.
Das impliziert aber $\varepsilon \leq |f(x_0) - f(x_0)| = 0$. Mit diesem Widerspruch ist der Beweis beendet. $\square$

[1] Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, welche gegen ein $y_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert, so folgt $|f(x_0)-y_n| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit durch Grenzwertbildung auch $|f(x_0) - y_0| \geq \varepsilon$, also $y_0 \in A$.

15) Eine kuriose Funktion:
Wir definieren $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ für } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ 1 \text{ für } x = 0 \\ \frac{1}{q} \text{ für } x \in (0,1] \cap \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \text{ vollständig gekürzt.} \end{cases}$$

Dann ist f an jeder Stelle $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ unstetig und an jeder Stelle $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ stetig.

Beweis.
(a) Sei $x_0 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Da zwischen je zwei reellen Zahlen stets noch eine irrationale Zahl liegt, finden wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ mit $x_n \to x_0$.
Es folgt $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $f(x_0) \neq 0$. Also gilt $f(x_n) \not\to f(x_0)$ und somit ist f an der Stelle x_0 unstetig.
(b) Sei nun $x_0 \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ und sei $0 < \varepsilon < 1$. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 1/\varepsilon$.
Angenommen nun es ist $x \in (0,1]$ mit $|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| > \varepsilon$. Dann muss x rational sein. Wir schreiben x als vollständig gekürzten Bruch p/q. Es folgt $1/q > \varepsilon$ (nach Definition von f) und daher $q < 1/\varepsilon \leq N$. Wegen $x = p/q \leq 1$ folgt auch $p \leq q \leq N$.
Damit ist folgendes gezeigt:

$$A := \{x \in [0,1] : |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon\} \subseteq \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \{1, \ldots, N\}\right\} \cup \{0\} =: B.$$

Die Menge B ist endlich (sie hat höchstens $N^2 + 1$ Elemente) und daher ist auch A endlich. Ferner ist $A \neq \emptyset$ (denn $0 \in A$). Also existiert $\delta := \min\{|x - x_0| : x \in A\}$ und wegen $x_0 \notin A$ ist $\delta > 0$.
Ist nun $x \in [0,1]$ mit $|x - x_0| < \delta$, so folgt $x \notin A$ und daher $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
Nach dem ε-δ-Kriterium ist f also stetig an der Stelle x_0. $\square$

Übrigens kann man zeigen, dass es keine Funktion auf $[0,1]$ gibt, die an allen rationalen Stellen stetig und an allen irrationalen Stellen unstetig ist. Der Beweis dieser Aussage ist aber zu schwierig für dieses Seminar.

16) Gleichmäßige Stetigkeit von $1/f$:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig mit $K := \inf\{|f(x)| : x \in D\} > 0$. Dann ist auch $1/f$ gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$x, y \in D,\ |x-y| \le \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \le K^2\varepsilon.$$

Ferner ist $|f(x)f(y)| \ge K^2$ für alle $x, y \in D$ (nach Definition von K). Daher gilt für alle $x, y \in D$ mit $|x-y| \le \delta$ auch

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|f(x)f(y)|} \le \frac{|f(x)-f(y)|}{K^2} \le \frac{K^2\varepsilon}{K^2} = \varepsilon.$$

□

Auf die Voraussetzung $K > 0$ kann man im Allgemeinen nicht verzichten. Zum Beispiel ist natürlich durch $f(x) = x$ eine gleichmäßig stetige Funktion erklärt. Jedoch ist die durch $1/f(x) = 1/x$ gegebene Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht gleichmäßig stetig. Anderenfalls müsste es nämlich ein $\delta > 0$ mit $|1/x - 1/y| \le 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|x-y| \le \delta$ geben. Insbesondere wäre für alle $x > 0$

$$1 \ge \left|\frac{1}{x+\delta} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x+\delta-x|}{x(x+\delta)} = \frac{\delta}{x(x+\delta)}.$$

Die rechte Seite geht aber für $x \to 0^+$ gegen ∞, was ein Widerspruch ist.

17) Ableitung von $f(x)^{g(x)}$:
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei $h(x) := f(x)^{g(x)}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist auch h differenzierbar und es gilt

$$h'(x) = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \log(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Es gilt $h(x) = e^{g(x) \log(f(x))}$, daher folgt aus den üblichen Ableitungsregeln

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{g(x) \log(f(x))} \left(g'(x) \log(f(x)) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x) \right) \\ &= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \log(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right). \end{aligned}$$

□

Beispiele:
(a) Sei $h(x) = (x^2+1)^{x^2}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^2+1)^{x^2} \left(2x \log(x^2+1) + x^2 \frac{2x}{x^2+1} \right) \\ &= 2x(x^2+1)^{x^2} \left(\log(x^2+1) + \frac{x^2}{x^2+1} \right). \end{aligned}$$

(b) Sei $h(x) = (2 - \sin(x))^{\cos(x)}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2-\sin(x))^{\cos(x)} \left(-\sin(x) \log(2-\sin(x)) + \cos(x) \frac{-\cos(x)}{2-\sin(x)} \right) \\ &= -(2-\sin(x))^{\cos(x)} \left(\sin(x) \log(2-\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{2-\sin(x)} \right). \end{aligned}$$

18) Leibniz-Formel für die höheren Ableitungen eines Produkts:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann ist auch fg n-mal differenzierbar und es gilt

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \qquad \forall x \in I.$$

(Man beachte die Ähnlichkeit zum binomischen Satz.)

Beweis. Auch der Beweis ist analog zum Beweis des binomischen Satzes. Man argumentiert induktiv nach n.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ folgt die Aussage direkt aus der Produktregel.
Induktionsschritt: Angenommen nun die Aussage stimmt für n-mal differenzierbare Funktionen und f und g sind sogar $(n+1)$-mal differenzierbar. Mit der Produktregel folgt dann für $x \in I$

$$\begin{aligned}
&(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + f(x) g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x) g(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + f(x) g^{(n+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x).
\end{aligned}$$

□

19) Satz von Darboux:
Jede Ableitungsfunktion erfüllt die Aussage des Zwischenwertsatzes (obwohl Ableitungen bekanntermaßen nicht stetig sein müssen).
Genauer gilt: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f'(a) \neq f'(b)$. Sei c ein Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = c$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $f'(a) < c < f'(b)$. Wegen

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

gibt es ein $0 < h_1 < b - a$ mit

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < c \quad \forall h \in (0, h_1].$$

Ebenso ist

$$f'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(b-h) - f(b)}{-h}$$

und folglich existiert ein $0 < h_2 < b - a$ mit

$$\frac{f(b-h) - f(b)}{-h} > c \quad \forall h \in (0, h_2].$$

Sei $h_0 := \min\{h_1, h_2\}$ und sei

$$F(x) := \frac{f(x+h_0) - f(x)}{h_0} \quad \forall x \in [a, b - h_0].$$

Dann gilt $F(a) < c < F(b-h_0)$ und F ist stetig (denn f ist als differenzierbare Funktion stetig). Aus dem Zwischenwertsatz folgt also: Es existiert ein $x_0 \in (a, b - h_0)$ mit $F(x_0) = c$.
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert eine Stelle $\xi \in (x_0, x_0 + h_0) \subseteq (a, b)$ mit

$$F(x_0) = \frac{f(x_0 + h_0) - f(x_0)}{h_0} = f'(\xi).$$

Es folgt $f'(\xi) = c$. $\square$

20) Symmetrische Ableitung:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$f_s(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

die *symmetrische Ableitung* von f an der Stelle x_0, falls dieser Grenzwert existiert.

(a) Ist f differenzierbar an der Stelle x_0, so gilt $f_s(x_0) = f'(x_0)$.

Beweis. Sei f bei x_0 differenzierbar. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{2h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-2h} \\
&= \frac{f'(x_0)}{2} + \frac{f'(x_0)}{2} = f'(x_0).
\end{aligned}$$

□

(b) Die Umkehrung von a) gilt nicht. Ist zum Beispiel $f(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt $f_s(0) = 0$, denn $f(h) = f(-h)$ für alle $h \in \mathbb{R}$. Trotzdem ist f bei 0 bekanntlich nicht differenzierbar.
Ist $g(x) = 1/x^2$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $g(0) = 0$, so gilt ebenfalls $g(h) = g(-h)$ für alle $h \in \mathbb{R}$ und folglich $g_s(0) = 0$. Dennoch ist g an der Stelle 0 nicht einmal stetig (da z. B. $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$).

(c) Das bekannte notwendige Kriterium für ein Extremum gilt für die symmetrische Ableitung im Allgemeinen nicht. Sei z. B.

$$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ für } x \geq 0, \\ -x \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

Dann hat f an der Stelle 0 offensichtlich ein (sogar globales) Minimum. Trotzdem ist $f_s(0) = 1/2 \neq 0$.

Beweis. Es ist

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h - h}{2h} = \frac{1}{2}$$

und

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h + 2h}{2h} = \frac{1}{2}.$$

□

21) Zweite symmetrische Ableitung:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

Beweis. Wir betrachten das erste Taylor-Polynom von f mit Entwicklungspunkt x_0, also

$$T^f_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Nach der Taylor-Formel (Satz VI.3.2. im Skript) existiert für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein ξ_h zwischen x_0 und $x_0 + h$ und ein η_h zwischen x_0 und $x_0 - h$ mit

$$f(x_0 + h) - T^f_{1,x_0}(x_0 + h) = \frac{1}{2} f''(\xi_h) h^2$$

und

$$f(x_0 - h) - T^f_{1,x_0}(x_0 - h) = \frac{1}{2} f''(\eta_h) h^2.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} \\
&= \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + f''(\xi_h)h^2/2 + f(x_0) - f'(x_0)h + f''(\eta_h)h^2/2 - 2f(x_0)}{h^2} \\
&= \frac{1}{2} f''(\xi_h) + \frac{1}{2} f''(\eta_h).
\end{aligned}$$

für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Da ξ_h stets zwischen x_0 und $x_0 + h$ liegt, folgt $\lim_{h \to 0} \xi_h = x_0$. Ebenso gilt $\lim_{h \to 0} \eta_h = x_0$. Da f'' laut Voraussetzung stetig ist, folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f''(\xi_h) + f''(\eta_h)}{2} = f''(x_0).$$

□

22) Lineare, homogene Differentialgleichung 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten:
Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $y_0, \alpha \in \mathbb{R}$. Sei $y : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) y ist differenzierbar mit

$$y'(t) = \alpha y(t) \quad \forall t \in I \quad \text{und} \quad y(t_0) = y_0.$$

(ii) $y(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ für alle $t \in I$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Ist $y(t) = y_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ für alle $t \in I$, so folgt $y'(t) = y_0 \alpha e^{\alpha(t-t_0)} = \alpha y(t)$ für alle $t \in I$ und $y(t_0) = y_0$.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Es gelte (i). Wir definieren eine Hilfsfunktion g durch $g(t) := y(t)e^{-\alpha(t-t_0)}$ für $t \in I$. Dann gilt

$$g'(t) = y'(t)e^{-\alpha(t-t_0)} - \alpha y(t)e^{-\alpha(t-t_0)} \quad \forall t \in I.$$

Da nach Voraussetzung $y'(t) = \alpha y(t)$ gilt, folgt $g' = 0$, also muss g konstant sein, etwa gleich C. Es folgt $y(t) = g(t)e^{\alpha(t-t_0)} = Ce^{\alpha(t-t_0)}$ für alle $t \in I$. Insbesondere folgt $y_0 = y(t_0) = C$. Damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

Beispiel: Wir betrachten den Zerfall eines radioaktiven Elements. Es bezeichne $N(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallenen Atomkerne. Weiter sei $N_0 = N(0)$ die zum Anfangszeitpunkt 0 vorhandene Anzahl von Atomkernen. Für die Zerfallsrate, also die Ableitung $N'(t)$, gilt $N'(t) = -\lambda N(t)$ für $t \geq 0$. Dabei ist $\lambda > 0$ eine Konstante, die sogenannte *Zerfallskonstante* des Elements.
Aus den obigen Überlegungen folgt nun sofort $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$. Die Anzahl der nicht zerfallenen Atomkerne nimmt also mit der Zeit exponentiell ab.
Als *Halbwertszeit* des radioaktiven Elements bezeichnet man die Zeitspanne T bis zu der die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Atomkerne zerfallenen sind, also $N(T) = N_0/2$. Es folgt $1/2 = e^{-\lambda T}$ und somit $T = \log(2)/\lambda$.

23) Partielle Integration:
Seien $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Nach der Produktregel gilt $(uv)' = u'v + uv'$. Da u und v nach Voraussetzung *stetig* differenzierbar sind, ist auch $(uv)'$ stetig. Also folgt aus der Newton-Leibniz-Formel:

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b.$$

Auseinanderziehen des linken Integrals und Umstellen liefert die Behauptung.
□

Beispiel: Für $u(x) = \sin(x)$ und $v(x) = x$ folgt

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{dx}$$
$$= \frac{\pi}{2}\sin(\pi/2) - [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

24) Integration durch Substitution:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Beweis. Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Sei $G(x) := F(g(x))$ für alle $x \in [a, b]$. Aus der Kettenregel folgt $G'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Also ist G eine Stammfunktion der stetigen Funktion $(f \circ g)g'$. Daher gilt

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

□

Beispiel: Für $f(y) = e^y$ und $g(x) = x^3$ folgt

$$\int_1^2 x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^2 3x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^8 e^y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}[e^y]_1^8 = \frac{1}{3}(e^8 - e).$$

25) Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung:
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $g \geq 0$ oder $g \leq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir $g \geq 0$ an. Wie im Beweis des gewöhnlichen Mittelwertsatzes setzen wir $M := \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ und $m := \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Wegen $g \geq 0$ folgt $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und daher auch

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wegen $g \geq 0$ ist auch $S := \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$. Im Falle $S = 0$ folgt aus der obigen Ungleichung $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ und man kann jedes beliebige $\xi \in [a, b]$ wählen. Ist dagegen $S > 0$, so folgt

$$m \leq \frac{1}{S}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

und wegen der Stetigkeit von f gilt nach dem Zwischenwertsatz $[m, M] \subseteq \mathrm{Im}(f)$. Also gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{S}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

26) Volumen von Rotationskörpern:
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ eine stetige Funktion. Es bezeichne V das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossene Fläche einmal komplett um die x-Achse rotieren lässt.
Wir wollen V berechnen und teilen dazu das Intervall $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle auf, setzen also

$$x_{i,n} := a + i\frac{b-a}{n} \quad \text{für } i = 0, \ldots, n.$$

Nun betrachten wir die n Kreisscheiben mit Radius $f(x_{i,n})$ und Dicke $x_{i,n} - x_{i-1,n} = (b-a)/n$. Die i-te Kreisscheibe hat dann das Volumen $\pi(f(x_{i,n}))^2(b-a)/n$ und ihr Gesamtvolumen ist

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i,n}))^2 \frac{(b-a)}{n} = \pi\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i,n}))^2.$$

Für hinreichend großes n ist dies eine gute Approximation an das Volumen V des Rotationskörpers. Den exakten Wert erhält man durch Grenzübergang $n \to \infty$, also

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \pi\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i,n}))^2 = \pi\int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}x,$$

wobei wir im letzten Schritt die Beschreibung des Integrals als Grenzwert von Riemannschen Summen (Satz VII.1.10. im Skript) ausgenutzt haben.

Beispiel: Es seien $R > 0$ und $h > 0$. Wir betrachten die Funktion $f : [0, h] \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) := Rx/h$ für $x \in [0, h]$. Der entsprechende Rotationskörper ist dann ein Kegel der Höhe h mit kreisförmiger Grundfläche vom Radius R (die Spitze des Kegels liegt im Koordinatenursprung). Für dessen Volumen ergibt sich

$$V = \pi\int_0^h (f(x))^2 \,\mathrm{d}x = \pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h x^2 \,\mathrm{d}x = \pi\frac{R^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi\frac{R^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

27) Konvexe Funktionen:
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls folgendes gilt:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0,1].$$

f heißt *konkav*, falls die entsprechende Ungleichung mit $\geq$ gilt.
Anschaulich bedeutet Konvexität von f, dass der Graph von f auf jedem Teilintervall $[x, y]$ komplett unterhalb der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ verläuft.
Satz: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt: f ist konvex $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. (a) Sei $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f' monoton steigend.
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und sei $\lambda \in (0,1)$. Ohne Einschränkung sei $x < y$. Wir setzen $z := \lambda x + (1-\lambda)y$. Dann ist $x < z < y$.
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existieren $s \in (x, z)$ und $t \in (z, y)$ mit

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(s) \quad \text{und} \quad \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(t).$$

Es folgt $s < t$ und somit $f'(s) \leq f'(t)$. Es folgt

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Nun ist $z - x = (1-\lambda)(y - x)$ und $y - z = \lambda(y - x)$. Damit ergibt sich

$$\lambda(f(z) - f(x)) \leq (1-\lambda)(f(y) - f(z)).$$

Daraus folgt aber $-\lambda f(x) \leq (1-\lambda)f(y) - f(z)$ und somit auch $f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Damit ist die Konvexität von f bewiesen.
(b) Sei nun umgekehrt f konvex. Angenommen es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f''(x_0) < 0$.
Wir definieren eine Hilfsfunktion h durch $h(x) := f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ und $h''(x) = f''(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Es folgt $h'(x_0) = 0$ und $h''(x_0) = f''(x_0) < 0$. Daher hat h an der Stelle x_0 ein lokales Maximum und zwar sogar ein striktes, d. h. es gibt ein gewisses $\delta > 0$ mit $h(x) < h(x_0)$ für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$ (vgl. den Beweis von Satz VI.2.7. im Skript).
Sei $a := x_0 - \delta$ und $b := x_0 + \delta$. Es folgt

$$h(x_0) = \frac{1}{2}h(x_0) + \frac{1}{2}h(x_0) > \frac{h(a) + h(b)}{2}.$$

Andererseits ist wegen der Konvexität von f

$$h(x_0) = f(x_0) = f(a/2 + b/2) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

und es gilt $h(a) + h(b) = f(a) + f(b) - f'(x_0)(a - x_0) - f'(x_0)(b - x_0) = f(a) + f(b) - f'(x_0)(a + b - 2x_0) = f(a) + f(b)$.
Somit erhalten wir den Widerspruch $(h(a) + h(b))/2 < h(x_0) \leq (h(a) + h(b))/2$.
Es muss also $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. $\square$

Beispiel: Die Exponentialfunktion ist konvex, denn $\exp''(x) = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

28) Jensen-Ungleichung:
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion (siehe 27) zur Definition). Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Beweis. Wir argumentieren induktiv nach n. Der Induktionsanfang ($n = 1$) ist klar.
Angenommen nun die Behauptung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ und es seien $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ mit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.
Wir setzen $\mu := \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Dann ist $\mu > 0$ und $\mu < \mu + \lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.
Zudem gilt $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu^{-1} = \mu^{-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.
Nach unserer Induktionsvoraussetzung gilt also

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu^{-1} x_i\right) \leq \mu^{-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Wegen der Konvexität von f gilt aber auch

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\mu \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu^{-1} x_i + (1-\mu) x_{n+1}\right) \\ &\leq \mu f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mu^{-1} x_i\right) + (1-\mu) f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Kombiniert man beide Ungleichungen, so folgt

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + (1-\mu) f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

□

Als eine Anwendung geben wir einen alternativen Beweis für die allgemeine Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (siehe 7)): Es seien $x_1, \ldots, x_n > 0$. Wir setzen $y_i := \log(x_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da die Exponentialfunktion konvex ist (siehe 27)), folgt

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \exp(y_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Es ist aber

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right) = \left(\exp\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)\right)^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^n \exp(y_i)\right)^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}.$$

Also gilt

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

29) Eulersches Sinusprodukt:
Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \cos(2^{-i}x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Beweis. Zunächst sei an die Formel $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$ erinnert. Diese können wir verwenden, um induktiv folgendes zu zeigen:

$$\sin(x) = 2^n \sin(2^{-n}x) \prod_{i=1}^{n} \cos(2^{-i}x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für den Induktionsanfang haben wir $\sin(x) = \sin(2x/2) = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$. Angenommen nun die Formel gilt für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 2^n \sin(2^{-n}x) \prod_{i=1}^{n} \cos(2^{-i}x) \\ &= 2^n 2\sin(2^{-n}x/2)\cos(2^{-n}x/2) \prod_{i=1}^{n} \cos(2^{-i}x) \\ &= 2^{n+1} \sin(2^{-(n+1)}x) \prod_{i=1}^{n+1} \cos(2^{-i}x). \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.
Aus der obigen Formel folgt

$$\prod_{i=1}^{n} \cos(2^{-i}x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin(2^{-n}x)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in M := \mathbb{R} \setminus \left\{2^k l\pi : k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}\right\}$ (für diese x ist der Nenner auf der rechten Seite ungleich 0).
Weiter gilt

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y) - \sin(0)}{y} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \cos(2^{-i}x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x)}{2^n \sin(2^{-n}x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{2^{-n}x}{\sin(2^{-n}x)} = \frac{\sin(x)}{x}$$

für alle $x \in M$ (denn $2^{-n}x \to 0$ für $n \to \infty$).
Ist dagegen $x = 2^k l\pi$ für gewisse Zahlen $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so schreiben wir l in der Form $l = 2^m(2r+1)$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \mathbb{Z}$ und erhalten $\cos(x2^{-k-m-1}) = \cos((2r+1)\pi/2) = 0$. Somit ist auch $\prod_{i=1}^{n} \cos(2^{-i}x) = 0 = \sin(x)/x$ für alle $n \geq k+m+1$. □

30) Produktformel von Vieta:
Wir setzen

$$a_1 := \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\sqrt{2+2a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{2}{\pi}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $a_n = \cos(\pi/2^{n+1})$ gilt.
Es ist nämlich $a_1 = \sqrt{2}/2 = \cos(\pi/4)$ und falls $a_n = \cos(\pi/2^{n+1})$ ist, so folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= \frac{1}{4}(2+2a_n) = \frac{1}{2}(1+\cos(\pi/2^{n+1})) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\pi/2^{n+2})) \\ &= \frac{1}{2}(1+\cos^2(\pi/2^{n+2}) - \sin^2(\pi/2^{n+2})) = \cos^2(\pi/2^{n+2}). \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Formeln $\cos(2y) = \cos^2(y) - \sin^2(y)$ und $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ verwendet.
Wegen $\cos(\pi/2^{n+2}) \geq 0$ folgt also $a_{n+1} = \cos(\pi/2^{n+2})$, was den Induktionsbeweis abschließt.
Aus der Eulerschen Sinusproduktformel (siehe 29)) folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \cos(\pi/2^{i+1}) = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$\square$