Wintersemester 2019/20
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

Dr. André Uschmajew
Dr. Max Pfeffer

9. Übungsblatt
Optimierung I

Die Abgabe der Hausaufgaben erfolgt in der Übung am 16.1.2020.

Übungsaufgaben

1. **Standardform.**

   Bringen Sie das folgende lineare Programm in Standardform:

   $$\max_{x,y} c^{\mathsf{T}} x + d^{\mathsf{T}} y \quad \text{u.d.N.} \quad A_1 x = b_1,\ A_2 x + By \leq b_2,\ p \leq y \leq q,$$

   wobei es keine expliziten Schranken für x gibt.

2. **Investitionsoptimierung.**

   Sie haben 6000€ zur Verfügung und wollen diese und Ihre Zeit investieren, um Ihren Freunden bei ihren Startups zu helfen. Ihr erster Freund erhofft von Ihnen 5000€ und 200 Stunden Arbeitseinsatz, womit er Ihnen ein Einkommen von 9500€ in Aussicht stellt. Entsprechend bietet Ihr zweiter Freund einen Ertrag von 9000€ bei einem Einsatz von 4000€ Kapital und 250 Stunden Arbeit. Beide stellen Ihnen aber auch in Aussicht, diesen Einsatz nur anteilig, dann aber proportional zu leisten. Also etwa beim ersten Freund 2500€ Kaptialeinsatz und 100 Stunden Arbeitseinsatz für 4750€ Ertrag. Aufgrund anderer Verpflichtungen haben Sie 300 Stunden Arbeitszeit zur Verfügung. Wie können Sie Ihr Kapital und Ihre Arbeit so einsetzen, dass Ihr Einkommen maximal ist?

   (a) Stellen Sie das lineare Optimierungsproblem auf und lösen Sie dieses grafisch.

   (b) Wir stellen fest, dass zwei Ungleichungen inaktiv sind und das duale Problem damit ebenfalls zweidimensional ist. Stellen Sie dieses auf und verfahren Sie analog.

3. **Zulässigkeit.**

   Gegeben sei eine nichtnegative Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \geq 0$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ mit mindestens einem negativen Eintrag $b_i < 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass dann das lineare Problem

   $$\max b^{\mathsf{T}} x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax \leq c$$

   für jedes $c \in \mathbb{R}^n$ unbeschränkt ist.

Hausaufgaben

1. **Unzulässigkeit.** (4 Punkte)

   Der Dualitätssatz aus der Vorlesung schließt den Fall nicht aus, dass sowohl das primale als auch das duale Problem unzulässig sind. Geben Sie ein einfaches lineares Programm an, für das das der Fall ist.

2. **Versorgunsproblem mit Variablentransformation.** (8 Punkte)

   Ein Supermarkt soll mit Kartoffeln versorgt werden. Dabei kann er diese von 3 verschiedenen Bauernhöfen beziehen, zum Preis von $c_1 = 3€/10\text{kg}, c_2 = 5€/10\text{kg}$ bzw. $c_3 = 1€/10\text{kg}$. Es soll ein Bedarf von 100kg gedeckt werden und dieser soll auch nicht überschritten werden. Weiterhin benötigen die 3 Bauernhöfe für die Ernte und den Transport der Kartoffeln $a_1 = 7\text{Std}/10\text{kg}, a_2 = 4\text{Std}/10\text{kg}$ bzw. $a_3 = 8\text{Std}/10\text{kg}$ und der Supermarkt benötigt die Kartoffeln in maximal 76Std. Zuletzt können die Bauernhöfe nur eine begrenzte Menge an Kartoffeln bereitstellen und zwar jeweils $60\text{kg}, 30\text{kg}$ bzw. 80kg.

   (a) Stellen Sie das lineare Optimierungsproblem auf, das die Versorgunsaufgabe beschreibt. Hierbei seien x_1, x_2 und x_3 die Mengen in 10kg, die von den jeweiligen Bauernhöfen bezogen werden.

   (b) Führen Sie eine Variablentransformation durch, sodass $y_1 = x_1$ und $y_2 = 3x_1+5x_2+x_3$ ist und stellen Sie das transformierte Optimierungsproblem auf. Beachten Sie, dass die Gleichungsnebenbedingung nun wegfällt.

   (c) Stellen Sie das nun zweidimensionale Problem grafisch dar und berechnen Sie dessen Lösung. Führen Sie diese in die Lösung des ursprünglichen Problems über.

3. **Überbestimmte Gleichungssysteme.** (8 Punkte)

   Betrachten Sie das überbestimmte Gleichungssystem $Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ m > n$. Nach Gaußscher Elemination mit Pivotisierung an A erhält man

   $$PAQ = L \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   wobei P und Q Permutationsmatrizen sind, $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine linke untere Dreiecksmatrix, $U_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix und nichtsingulär, $U_{12} \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$ und $r = \text{Rang}(A) \leq n$.

   (a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann zulässig ist, wenn die letzten $m - r$ Einträge von $L^{-1}Pb$ gleich 0 sind.

   (b) Finden Sie eine Formel für die eindeutige Lösung von $Ax = b$ für den Fall dass $r = n$ gilt.

   (c) Zeigen Sie, dass das reduzierte Gleichungssystem bestehend aus den ersten r Zeilen von PA und den ersten r Einträgen von Pb äquivalent zu $Ax = b$ ist, also die Lösung des einen Problem auch die des anderen ist (bis auf Nulleinträge).