3.Übung zur Vorlesung Analysis
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Dienstag, 29.10.2019
Abgabe: Dienstag, 5.11.2019 in der Vorlesung oder bis spätestens 13:00 Uhr im Postfach Hardtke (die Postfächer befinden sich im Raum A 514).

Wichtig: Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen selbstständig bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte)**.** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (mit Begründung):

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 2n^2 + n}{n^3 + 3n + 8}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4 + (-1)^n n}{n^4 + 4n + 1}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 2^{-n} - 2}{3n^2 + 1}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1} + 2^{n+2}}$

Aufgabe 2 (1+1+1+1 Punkte)**.** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (mit Begründung):

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + n - 3}{5n^2 + \sqrt[n]{n^{2n+1}}}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5 \sqrt[n]{2} + (-1)^n n^4 - 20n^3}{2n^5 + 8n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n^2} n 3^{-n} - 4n}{n + 7}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n - n}{5^n + n}$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte).
1) Seien $a \geq b \geq 0$ reelle Zahlen. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a.$$

2) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 + n} = 1.$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte).
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
Zeigen Sie:
1) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt (d. h. $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nach unten beschränkt), so gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty.$$

2) Ist zusätzlich $\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$, so ist auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty.$$