(iv) Die Folge $(\frac{n}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert 0. Mit vollständiger Induktion kann man nämlich zeigen, dass $2^n \geq n^2$ für $n \geq 4$. Folglich gilt

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \qquad \text{für } n \geq 4.$$

Wählen wir also zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ die Zahl $n_0 = \max\{\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil, 4\}$, so ist das Konvergenzkriterium erfüllt.

(v) Für $a \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man kann zeigen, dass (a^n) für $|a| \geq 1$ und $a \neq 1$ divergent ist. Für den Fall $a = 1$ ist die Folge (a^n) konstant und konvergiert folglich gegen 1. Ist $|a| < 1$, so konvergiert die Folge (a^n) gegen 0.

(vi) Wir betrachten noch einmal die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wie weiter oben vermutet, konvergiert diese Folge gegen den Grenzwert $\sqrt{2}$. Man kann mit vollständiger Induktion leicht zeigen, dass $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin kann man leicht nachrechnen, dass

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = |a_n - \sqrt{2}| \cdot \frac{|a_n - \sqrt{2}|}{2a_n} \leq |a_n - \sqrt{2}| \cdot \frac{1}{2}.$$

Folglich gilt nach Induktion

$$|a_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n},$$

so dass man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ die Zahl n_0 einfach so wählen kann, dass $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Dann gilt

$$|a_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Satz 4.1.10 (Eindeutigkeit des Grenzwerts). *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n \in \mathbb{C}$. Dann ist der Grenzwert a der Folge eindeutig bestimmt.*

Beweis. Im Widerspruch zur Behauptung nehmen wir an, dass die Folge sowohl gegen a als auch gegen $a' \neq a$ konvergiert. Wählt man $0 < \varepsilon < (a - a')/2$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für } n \geq n_0.$$

Außerdem gibt es ein $n_0' \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a'| < \varepsilon \qquad \text{für } n \geq n_0'.$$

Folglich gilt für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$:

$$|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < 2\varepsilon < |a - a'|,$$

was ein Widerspruch ist. □

Definition 4.1.11. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge.

(i) Die Folge (a_n) *geht gegen* ∞, in Zeichen $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls für alle $r > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n > r$ für alle $n \geq n_0$ ist.

(ii) Die Folge (a_n) *geht gegen* $-\infty$, in Zeichen $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls für alle $r < 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n < r$ für alle $n \geq n_0$ ist.

(iii) Die Folge (a_n) heißt *nach oben (unten) beschränkt*, falls die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine obere (untere) Schranke in $\mathbb{R}$ besitzt. Die Folge (a_n) heißt *beschränkt*, falls sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

(iv) Die Folge (a_n) heißt *monoton wachsend (monoton fallend)*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} \leq a_n)$. Ist zusätzlich $a_{n+1} \neq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir die Folge *streng monoton wachsend (fallend)*. Eine Folge heißt (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

Lemma 4.1.12. *Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert a. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \leq a + 1$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist (a_n) nach oben beschränkt durch $\max\{a + 1, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}\}$. Analog kann man zeigen, dass (a_n) nach unten beschränkt ist. □

Umgekehrt ist jede beschränkte reelle Zahlenfolge konvergent, falls sie monoton ist.

Lemma 4.1.13. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach oben (unten) beschränkte, monoton wachsende (fallende) Folge reeller Zahlen. Dann ist (a_n) konvergent mit Grenzwert $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $(\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.*

Beweis. Wir zeigen, dass die monoton wachsende Folge (a_n) gegen $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da a Supremum der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Da (a_n) monoton wachsend ist gilt dann

$$|a_n - a| \;=\; a - a_n \;<\; \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Folglich konvergiert (a_n) gegen a. Die geklammerte Version des Lemmas beweist man analog. □

Bemerkung. Man beachte, dass die Monotonie der Folge in Lemma 4.1.13 essenziell ist. Denn die Folge $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist zwar beschränkt jedoch nicht konvergent.

Satz 4.1.14 (Vergleichskriterium). *Es seien (a_n), (b_n) und (c_n) reelle Zahlenfolgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Ist $b \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$, so ist $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

(ii) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$*, so ist auch* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

(iii) Ist $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$*, so ist auch* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Beweis. Wir beweisen beispielhaft Teil (i). Die Beweise der restlichen Aussagen funktionieren ähnlich. Es sei $\varepsilon > 0$; dann gibt es $n_0, n_0' \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - b| \; < \; \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0$$

und

$$|c_n - b| \; < \; \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0'.$$

Folglich gilt

$$b - \varepsilon < a_n \; \leq \; b_n \; \leq \; c_n \; \leq \; b + \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq \max\{n_0, n_0'\}.$$

Damit konvergiert (b_n) gegen den Grenzwert b. □

Beispiel. Wir betrachten die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, konvergiert $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ wie die konstante Folge $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

Korollar 4.1.15. *Es seien (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen. Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) beschränkt, so ist die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Da (b_n) beschränkt ist, gibt es ein $B > 0$ mit $|b_n| \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich gilt $0 \leq |a_n \cdot b_n| \leq B \cdot |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da sowohl $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(B \cdot |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren, ist $(a_n \cdot b_n)$ nach Satz 4.1.14 (i) also eine Nullfolge. □

Lemma 4.1.16. *Es seien (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sind (a_n) und (b_n) konvergent, so gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beweis. Es sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Im Widerspruch zur Behauptung nehmen wir an, dass $b < a$. Es sei $\varepsilon := (a - b)/2$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > a - \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und ein $n_0' \in \mathbb{N}$ mit $b_n < b + \varepsilon$ für alle $n \geq n_0'$. Folglich gilt für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$, dass

$$b_n \; < \; b + \varepsilon \; = \; a - \varepsilon \; < \; a_n \; .$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bemerkung. Sind (a_n) und (b_n) reelle, konvergente Zahlenfolgen mit $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt daraus nicht notwendig, dass $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$. Zum Beispiel sind $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Nullfolgen mit $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.1.17. *Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente komplexe Zahlenfolgen, $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt:*